

Zapis wskaźnikowy i umowa sumacyjna

1. Pokazać, że $e_{ikm}e_{ikm} = 6$.
2. Pokazać, że $e_{ikm}e_{jkm} = 2\delta_{ij}$.
3. Dana jest macierzowa reprezentacja tensora

$$\text{a) } \sigma_{kl} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \text{ b) } \sigma_{kl} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \text{ c) } \sigma_{kl} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Podać dziewięć składowych d_{ij} zdefiniowanych związkiem: $d_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$.

4. Warunki nierozdzielności można zapisać tak

$$e_{pnr}e_{lsm}\epsilon_{rs'mn} = 0$$

Rozpisać je w notacji tradycyjnej dla

$$\text{a) } p=3 \text{ i } l=3, \text{ b) } p=1 \text{ i } l=2, \text{ c) } p=2 \text{ i } l=3.$$

5. Uogólnione prawo Hooke'a ma postać następującą: $\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu s_{ij}$. Wyprowadzić zależność pomiędzy γ_{ij} i s_{ij} , jeśli wiadomo, że

$$\gamma_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}.$$

6. Tensor stałych materiałowych materiału Hooke'a ma postać

$$C_{pqkl} = \lambda\delta_{pq}\delta_{kl} + \mu(\delta_{pl}\delta_{qk} + \delta_{pk}\delta_{ql})$$

Wykorzystując to wyrażenie zapisać związek konstytutywny $\sigma_{pq} = C_{pqkl}\epsilon_{kl}$.

7. Pokazać, że drugi niezmiennik tensora naprężenia, definiowany tak:

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix},$$

można przedstawić w postaci: $I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{kk}\sigma_{mm} - \sigma_{ij}\sigma_{ij})$.

Stan odkształcenia i stan naprężenia

1. Składowe tensora naprężenia transformują się zgodnie ze wzorem $\sigma'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \sigma_{kl}$

Wyznaczyć tensor σ'_{ij} jeśli znany jest tensor σ_{kl} i kosinusy kierunkowe osi x'_i . Sprawdzić niezmienniki.

$$\text{a) } \sigma_{kl} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \sigma_{kl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \sigma_{kl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} x'_1 : \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right] \\ x'_2 : \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right] \\ x'_3 : [0, 0, 1] \end{matrix}$$

2. Obliczyć niezmienniki, naprężenia główne i kierunki główne dla podanego tensora naprężenia.

$$\text{a) } \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

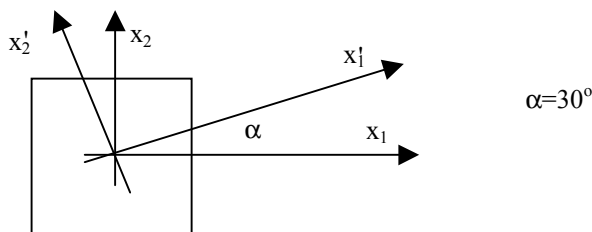
3. Obliczyć niezmienniki, naprężenia główne i kierunki główne dla podanego tensora naprężenia. Podać wartość maksymalnych naprężeń stycznych.

$$\text{a) } \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Składowe stanu naprężenia wyrażają się tak (przypadek płaski):

$$\text{a) } \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

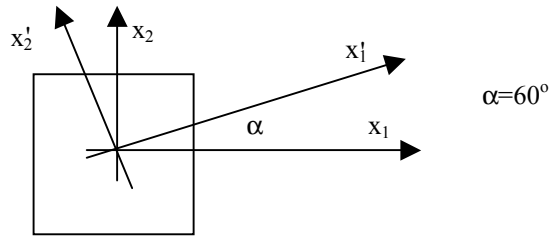
Wyznaczyć składowe stanu naprężenia w układzie obróconym.



5. Składowe stanu naprężenia wyrażają się tak (przypadek płaski):

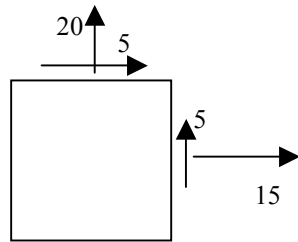
$$\text{a) } \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć składowe stanu naprężenia w układzie obróconym.

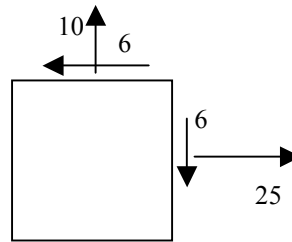


6. Wyznaczyć kierunki i wartości główne danego stanu naprężenia (przypadek płaski).
Zadanie rozwiązać analitycznie korzystając z równania sekularnego dla przypadku trójwymiarowego stanu naprężenia.

a)



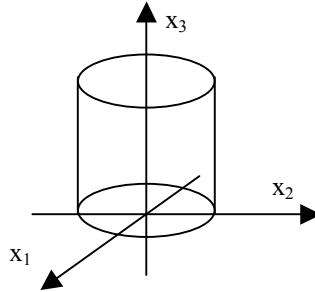
b)



Proste zadania teorii sprężystości

1. W pręcie walcowym jak na rysunku $\sigma_{13} = -Ax_2$, $\sigma_{23} = Ax_1$, pozostałe $\sigma_{ij} = 0$.

Wyznaczyć składowe sił objętościowych X_1, X_2, X_3 i znaleźć obciążenia powierzchni zewnętrznych walca.



2. W pewnym ośrodku składowe stanu naprężenia przyjmują wartości:

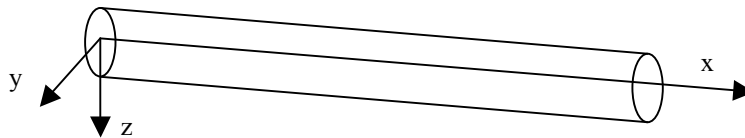
$$\sigma_x = Az, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Wyznaczyć siły objętościowe działające w tym ośrodku.

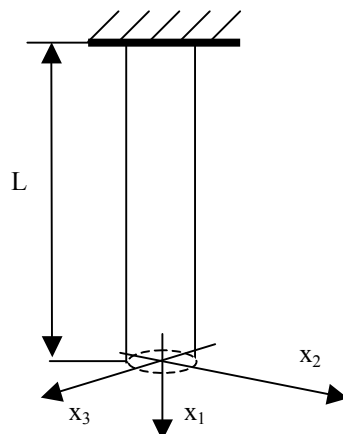
3. W pręcie przedstawionym na rysunku naprężenia wynoszą odpowiednio:

$$\sigma_x = Az, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

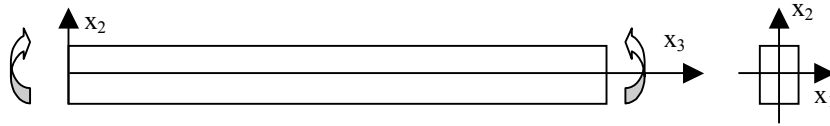
Jak są obciążone powierzchnie boczne pręta?



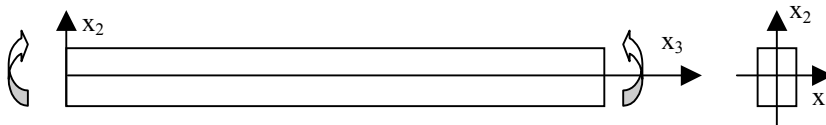
4. W pręcie przedstawionym na rysunku jedyną niezerową składową stanu naprężenia jest σ_{11} . Znaleźć jej wartość wiedząc, że wektor sił objętościowych $\{X\} = \{\gamma, 0, 0\}$.



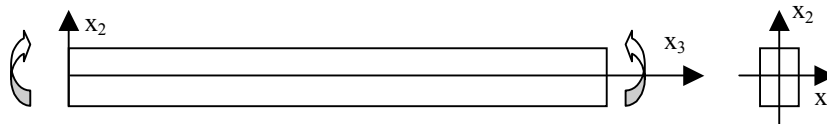
5. W pręcie jak na rysunku, $u_{11} = \frac{v}{\rho} x_2$, $u_{12} = -\frac{v}{\rho} x_1$, $u_{13} = 0$. Wyznaczyć funkcję $u_1(x_1, x_2, x_3)$ zakładając, że $u_1(0, 0, 0) = 0$.



6. W pręcie jak na rysunku, $u_{21} = \frac{v}{\rho} x_1$, $u_{22} = -\frac{v}{\rho} x_2$, $u_{23} = -\frac{v}{\rho} x_3$. Wyznaczyć funkcję $u_2(x_1, x_2, x_3)$ zakładając, że $u_2(0, 0, 0) = 0$.



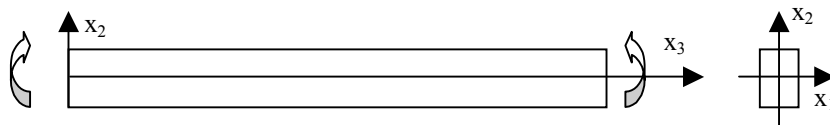
7. W pręcie jak na rysunku, $u_{31} = 0$, $u_{32} = \frac{1}{\rho} x_3$, $u_{33} = \frac{1}{\rho} x_2$. Wyznaczyć funkcję $u_3(x_1, x_2, x_3)$ zakładając, że $u_3(0, 0, 0) = 0$.



8. W pręcie zginanym jak na rysunku

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{-1}{2\rho} [x_3^2 - v(x_1^2 - x_2^2)], \quad u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\rho} x_2 x_3.$$

Pokazać, że spełniona jest hipoteza o zachowaniu odcinka normalnego.



Pokazać, że spełniona jest hipoteza o zachowaniu odcinka normalnego.

9. W pewnym ciele

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{-v}{\rho} x_2 x_3, \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{-1}{2\rho} [x_3^2 - v(x_1^2 - x_2^2)], \quad u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\rho} x_2 x_3.$$

Wyznaczyć składowe stanu odkształcenia w tym ciele.

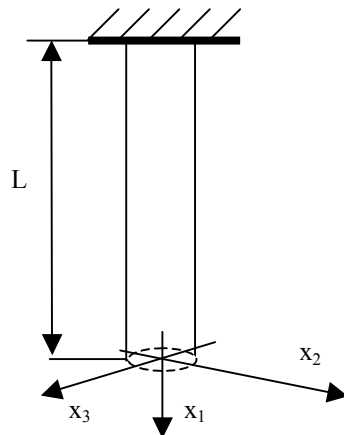
10. W pewnym ciele

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{-\gamma}{2E} [v(x_2^2 + x_3^2) - L^2 + x_1^2], \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{v\gamma}{E} x_2 x_1, \quad u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{v\gamma}{E} x_3 x_1$$

Wyznaczyć składowe stanu odkształcenia w tym ciele.

11. W pręcie przedstawionym na rysunku $u_{11} = \frac{-\gamma}{E} x_1$, $u_{12} = \frac{-\nu\gamma}{E} x_2$, $u_{13} = \frac{-\nu\gamma}{E} x_3$.

Wyznaczyć funkcję $u_1(x_1, x_2, x_3)$ zakładając, że $u_1(0, 0, 0) = 0$.



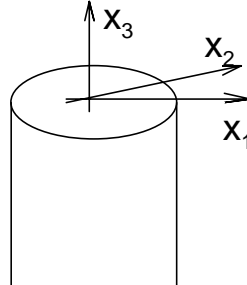
12. Wyznaczyć siły objętościowe w ciele, w którym:

$$\sigma_{11} = \frac{-Px_1x_3}{J}, \quad \sigma_{13} = \frac{P(x_3^2 - \frac{h^2}{4})}{2Jb}, \quad \text{pozostałe } \sigma_{ij} = 0, \quad \text{oraz } P, J, b - \text{const.}$$

Skrećanie prętów pryzmatycznych

1. Omówić postulowaną postać deformacji prętów skręconych (założenia dotyczące funkcji przemieszczeń).
2. Składowe stanu przemieszczenia w pręcie skręcanym mają postać:

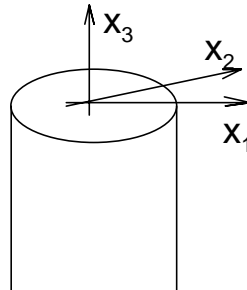
$$\begin{aligned} u_1 &= -\gamma x_2 x_3 \\ u_2 &= \gamma x_1 x_3 \\ u_3 &= \gamma \varphi(x_1, x_2) \end{aligned}$$



Podać wyrażenia na składowe stanu odkształcenia i składowe stanu naprężenia.

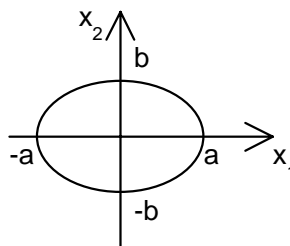
3. Składowe stanu przemieszczenia w pręcie skręcanym mają postać:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\gamma x_2 x_3 \\ u_2 &= \gamma x_1 x_3 \\ u_3 &= \gamma \varphi(x_1, x_2) \end{aligned}$$



Rozpisać różniczkowe równania równowagi przy założeniu, że pręt jest nieważki.

4. Wyprowadzić związek pomiędzy funkcją Prandtla, a momentem skręcającym.
5. Funkcja $\phi(x_1, x_2) = A \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right)$ jest funkcją Prandtla dla przekroju eliptycznego jak na rysunku. Wyznaczyć stałą A.



6. Funkcja Prandtla dla przekroju eliptycznego ma postać:

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{M_s}{\pi ab} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)$$

Policzyć naprężenia w punkcie o współrzędnych

$$\text{a) } (-0,8 ; 0,8) \text{ [m], b) } (0,8 ; 0,8) \text{ [m], c) } (0,8 ; -0,8) \text{ [m],}$$

jeśli wiadomo, że $M_S = 3,14 \text{ kNm}$, $a = b = 2 \text{ m}$. Wrysować je symbolicznie na przekroju.

7. Funkcja Prandtla dla przekroju eliptycznego ma postać:

$$\phi = G\gamma \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)$$

Wyrazić kąt γ przez znany moment skręcający M_S i podać wzór na kąt skręcania ϕ przekrojów odległych o l_0 .

Wskazówka: $\iint_F dF = \pi ab$, $\iint_F x_1^2 dF = \frac{1}{4} \pi a^3 b$, $\iint_F x_2^2 dF = \frac{1}{4} \pi ab^3$.

8. Wychodząc z funkcji Prandtla dla przekroju eliptycznego $\phi = \frac{M_s}{\pi ab} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)$ pokazać,

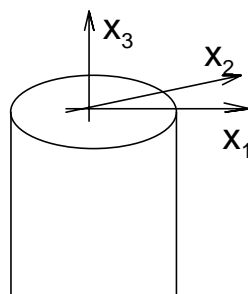
że w przekroju kołowym wypadkowe naprężenia styczne są liniową funkcją ρ . Podać ich wartość maksymalną.

9. Pochodne przemieszczenia u_3 dla skręcanego pręta eliptycznego są postaci:

$$u_{3,1} = C\gamma x_2, u_{3,2} = C\gamma x_1$$

Znaleźć funkcję u_3 przyjmując $u_3(0,0) = 0$.

10. Składowe stanu przemieszczenia skręcanego pręta eliptycznego mają następującą postać:



$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -\gamma x_2 x_3$$

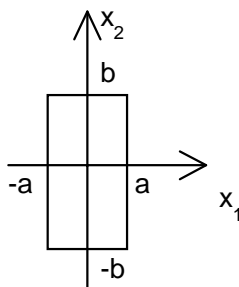
$$u_2(x_1, x_2, x_3) = \gamma x_1 x_3$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \gamma x_1 x_2$$

Podać wyrażenia na składowe stanu odkształcenia i naprężenia w tym pręcie.

11. Sprawdzić czy funkcja $\phi = C(x_1 - a)(x_1 + a)(x_2 - b)(x_2 + b)$

może być funkcją Prandtla dla przekroju takiego jak na rysunku.



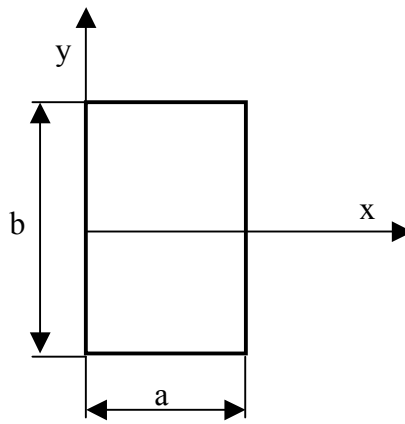
12. Pokazać, że wypadkowe naprężenia od skręcania $\tau = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2}$ są zawsze styczne do konturu skręcanego pręta eliptycznego.

Wskazówka: Funkcja Prandtla: $\phi(x_1, x_2) = A \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right)$.

Styczna do elipsy w punkcie x_o, y_o wyraża się równaniem: $\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1$.

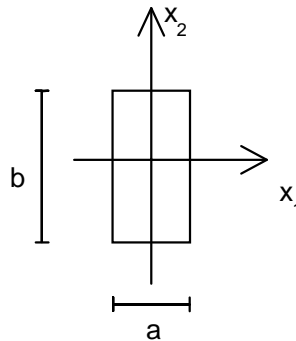
13. Wykazać, że funkcja $\phi(x_1, x_2) = - \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(\frac{8a^2 G \gamma}{n^3 \pi^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \right) + G \gamma x(a-x)$ jest

funkcją Prandtla dla pręta skręcanego o przekroju jak na rysunku.



14. Dla przekroju prostokątnego funkcję Prandtla przyjmuje się w postaci:

$$\phi = \sum_{n=1,3,5,\dots} f_n(x_2) \cos \frac{n\pi x_1}{a}$$



Pokazać, że $\phi = 0$ dla $x_1 = \pm \frac{a}{2}$.

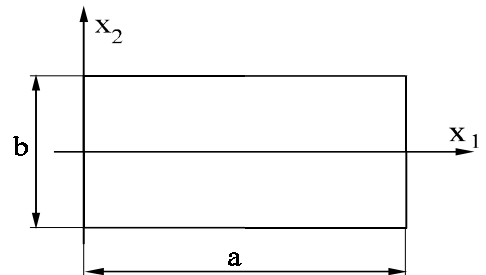
Wyprowadzić równanie różniczkowe na funkcję $f_n(x_2)$.

Płaski stan naprężenia

1. Podać przykłady konstrukcji, w których występuje płaski stan odkształcenia oraz przykłady konstrukcji, w których występuje płaski stan naprężenia.

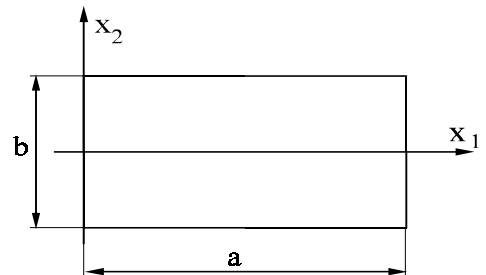
3. Jak jest obciążona tarcza jak na rysunku,
jeśli funkcja Airy'ego dla tej tarczy jest postaci:

$$F = cx_1x_2^3?$$

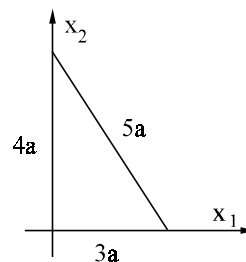


4. Jak jest obciążona tarcza jak na rysunku,
jeśli funkcja Airy'ego dla tej tarczy jest postaci:

$$F = dx_1^2x_2?$$

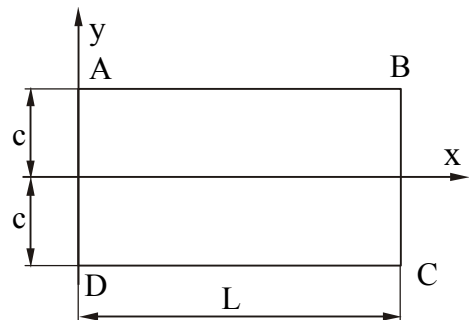


5. Jak jest obciążona tarcza jak na rysunku,
jeśli funkcja Airy'ego dla tej tarczy jest
postaci: $F = c_2x_2^2$?



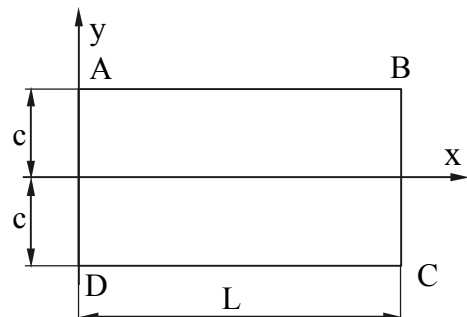
6. Jak są obciążone krawędzie AB i CD tarczy jak
na rysunku, jeśli funkcja Airy'ego dla tej tarczy
jest postaci:

$$F = s \left(\frac{xy}{4} - \frac{xy^2}{4c} - \frac{xy^3}{4c^2} + \frac{Ly^2}{4c} + \frac{Ly^3}{4c^2} \right) ?$$



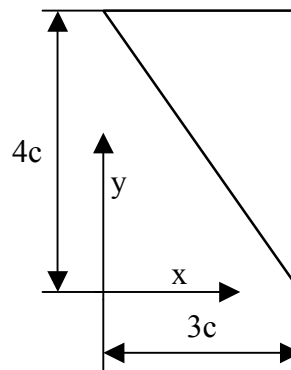
7. Jak są obciążona tarcza jak na rysunku,
jeśli funkcja Airy'ego dla tej tarczy
jest postaci:

$$F = b_2xy - \frac{b_2xy^3}{3c^2} ?$$

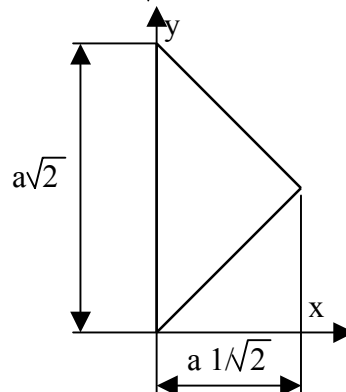


8. Jak jest obciążona tarcza jak na rysunku, jeśli funkcja Airy'ego dla tej tarczy jest postaci:

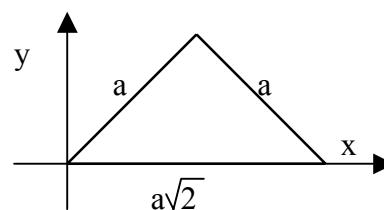
$$F(x, y) = a_3 x^3 + d_3 y^3?$$



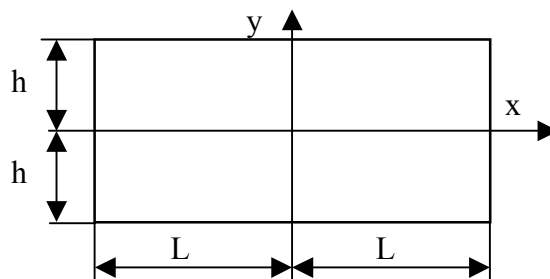
9. Jak jest obciążona tarcza jak na rysunku, jeśli funkcja Airy'ego dla tej tarczy jest postaci: $F(x, y) = d_2 y^2$?



9. Jak jest obciążona tarcza jak na rysunku, jeśli funkcja Airy'ego dla tej tarczy jest postaci: $F(x, y) = a_2 x^2$?



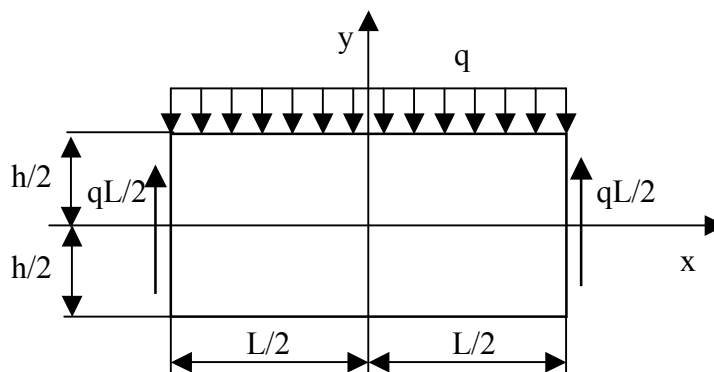
10. Jak jest obciążona tarcza jak na rysunku, jeśli funkcja Airy'ego dla tej tarczy jest postaci: $F(x, y) = a_4 x^4 - a_4 y^4$?



11. Funkcja Airy'ego dla tarczy jak a rysunku jest postaci:

$$F(x, y) = a_2 x^2 + b_3 x^2 y + d_3 y^3 + d_5 x^2 y^3 + f_5 y^5$$

- a) dobrać współczynniki tak, aby funkcja ta spełniała równanie tarczy,
 b) korzystając z naprężeniowych warunków brzegowych wyznaczyć stałe a_2, b_3, d_3, d_5, f_5 .

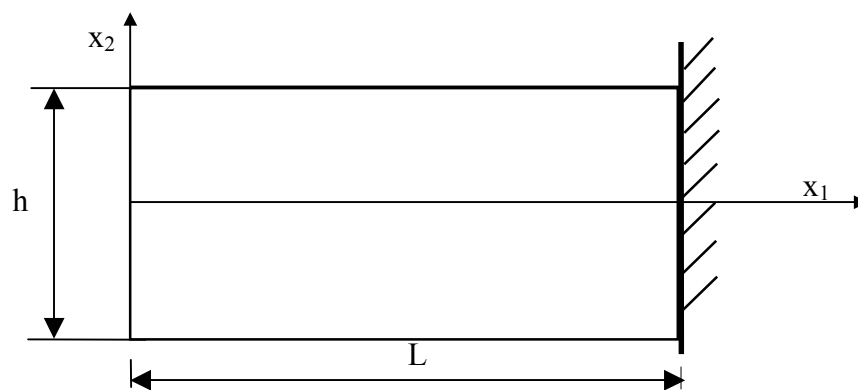


12. W belce wspornikowej (tarczy):

$$\sigma_{11} = \frac{P}{J} x_1 x_2, \quad \sigma_{12} = \frac{P}{2J} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right), \quad \text{a pozostałe } \sigma_{ij} = 0.$$

Wyznaczyć przemieszczenia u_1, u_2 , korzystając z warunku, że w punkcie $(L, 0)$:

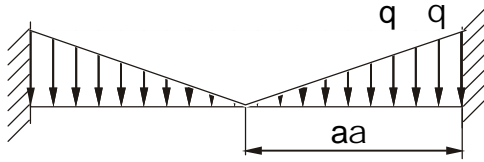
$$u_1 = u_2 = u_{2,1} = 0.$$



Płyty kołowe

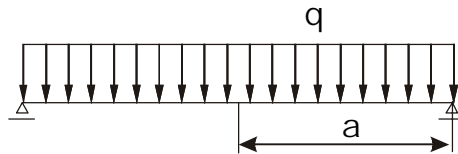
1. Wyznaczyć funkcję ugięcia płyty jak na rysunku.

Wskazówka: Wykorzystać równanie płyty w postaci: $\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{-t}{D}$



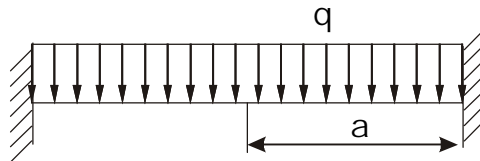
2. Wyznaczyć funkcję ugięcia płyty jak na rysunku.

Wskazówka: Wykorzystać równanie płyty w postaci: $\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{-t}{D}$



3. Funkcja ugięcia płyty jak na rysunku jest postaci

$$w(r) = \frac{qr^4}{64D} + C_1 r^2 + C_2$$



Znaleźć maksymalne ugięcie płyty.

4. Dla płyty jak na rysunku podać wyrażenie na siłę poprzeczną i sformułować warunki brzegowe.

