3. W pewnym punkcie konstrukcji dany jest tensor naprężenia:

$\sigma_{ij} =$ [MPa]

6.4	0.0	-4.6
0.0	1.1	0.0
-4.6	0.0	-4.2

Obliczyć współrzędną n_3 wektora kierunku głównego $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ *minimalnego* naprężenia głównego.

W pierwszej kolejności obliczamy naprężenia główne z równania

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma\,\delta_{ij}) = 0,$$

a w zapisie macierzowym

$$\det\begin{bmatrix} 6{,}4-\sigma & 0 & -4{,}6 \\ 0 & 1{,}1-\sigma & 0 \\ -4{,}6 & 0 & -4{,}2-\sigma \end{bmatrix} = 0.$$

Rozwinięcie wyznacznika względem drugiej kolumny (lub wiersza) prowadzi do równania

$$(1{,}1-\sigma)\times\underbrace{\left[(6{,}4-\sigma)\times(-4{,}2-\sigma)-(4{,}6)^2\right]}_{\text{równanie kwadratowe}}=0,$$

z którego znajdziemy jedno naprężenie główne $\sigma_1 = 1{,}1$ i otrzymamy równanie kwadratowe na dwa pozostałe

$$\sigma^2 - 2{,}2\sigma - 48{,}04 = 0.$$

Po rozwiązaniu: $\Delta = 2{,}2^2 - 4\times(-48{,}04) = 197$, $\sqrt{\Delta} = 14{,}0357$

$$\sigma_2 = \frac{-(-2{,}2) - 14{,}0357}{2} = -5{,}9178$$

$$\sigma_3 = \frac{-(-2{,}2) + 14{,}0357}{2} = 8{,}1178$$

Po uporządkowaniu naprężeń głównych $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ znajdujemy minimalne naprężenie główne

$$\sigma_{III} = -5{,}9178$$

Kierunek główny odpowiadający temu naprężeniu głównemu otrzymuje się z układu równań

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{III}\,\delta_{ij})\, n_j^{III} = 0,$$

a w zapisie macierzowym

$$\begin{bmatrix} 6{,}4-(-5{,}9178) & 0 & -4{,}6 \\ 0 & 1{,}1-(-5{,}9178) & 0 \\ -4{,}6 & 0 & -4{,}2-(-5{,}9178) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{III} \\ n_2^{III} \\ n_3^{III} \end{Bmatrix} = 0$$

Po sprowadzeniu równań do tradycyjnej formy

1) $12{,}3178\, n_1^{III} \qquad - 4{,}6\, n_3^{III} = 0 \Rightarrow n_1^{III} = 0{,}3734\, n_3^{III}$

2) $\qquad 7{,}0178\, n_2^{III} \qquad = 0 \Rightarrow n_2^{III} = 0$

3) $-4{,}6\, n_1^{III} \qquad + 1{,}7178\, n_3^{III} = 0 \Rightarrow n_1^{III} = 0{,}3734\, n_3^{III}$

Widać, że równania 1) i 3) są zależne i nie da się z tego układu wyznaczyć n_1^{III} i n_3^{III}. Skorzystamy z dodatkowego warunku długości wektora kierunku $|\vec{n}^{III}| = 1$

Czyli

$$(n_1^{III})^2 + \cancel{\overset{=0}{(n_2^{III})^2}} + (n_3^{III})^2 = 1$$

Skąd

$$(0{,}3734\, n_3^{III})^2 + (n_3^{III})^2 = 1,$$

$$(n_3^{III})^2 = \frac{1}{1{,}13943}$$

Ostatecznie

$$\underline{\underline{n_3^{III} = \pm\, 0{,}9368}}$$