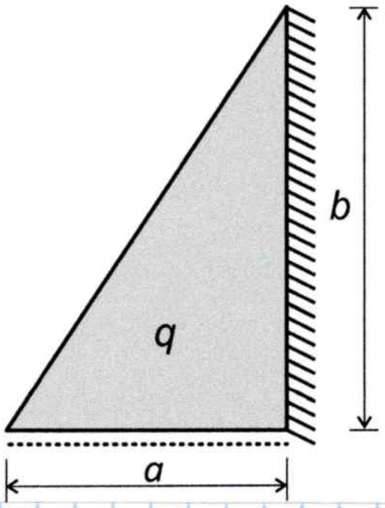
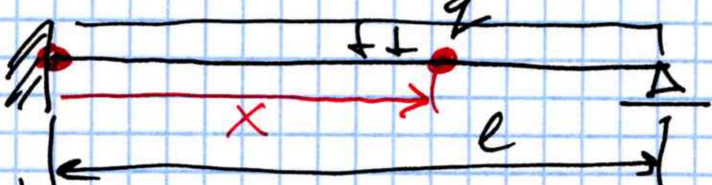
Zadanie 5.

5. Metodą linii załomów oszacować nośność graniczną płyty trójkątnej obciążonej na całej powierzchni obciążeniem równomiernym q. Przyjąć dane: $a = 5.1$, $b = 7.2$ [m], $M_0 = 105$ [kN].

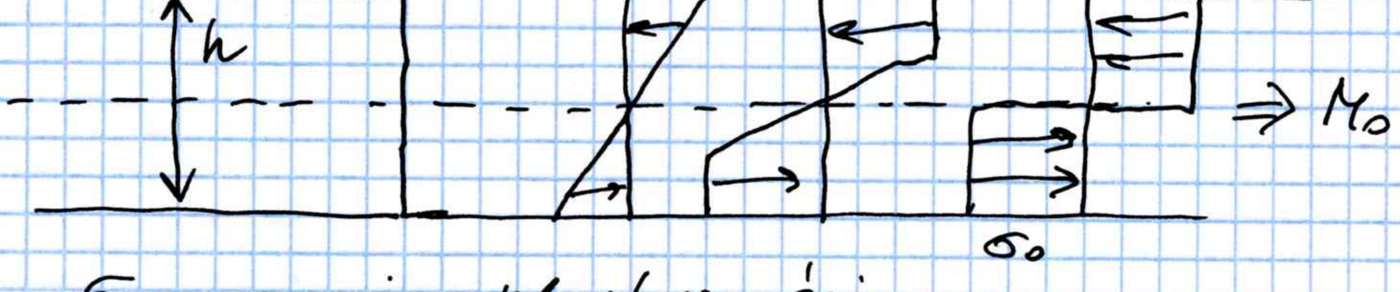


Metoda linii załomów jest metodą kinematyczną i jej ideę przedstawię na przykładzie belki



$0 < x < l$

Pierwszą rzeczą w metodzie kinematycznej jest określenie mechanizmu zniszczenia plastycznego. W powyższej belce mechanizm taki powstaje gdy pojawią się dwa przeguby plastyczne przenoszące moment graniczny M_0



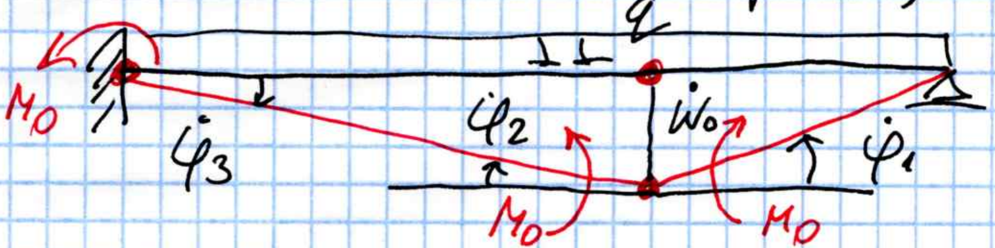
σ_0 – granica plastyczności

Dla belki o przekroju prostokątnym $b \times h$

$$M_0 = \frac{bh^2}{4}\sigma_0$$

Pierwszy przegub plastyczny powstanie na podporze (zamocowanie), a drugi gdzieś w przęśle i jego położenie oznaczymy przez x. W metodzie kinematycznej poszukujemy najmniejszego obciążenia granicznego q^k i z tego warunku wyznaczymy x.

Mechanizm zniszczenia plastycznego:



W teorii plastyczności posługujemy się prędkościami przemieszczeń stąd rzędna prędkości ugięcia $\dot{w}_0$. Równaniem, z którego obliczymy wartość obciążenia granicznego q^k, jest zasada mocy przygotowanych

$$L = D$$

$$L = \int_l q \cdot \dot{w}\, dx = q \int_l \dot{w}\, dx = q \cdot A_{\dot{w}}$$ – moc obciążenia

$A_{\dot{w}}$ – pole wykresu prędkości ugięcia (trójkąt)

$$D = M_0 \cdot \dot{\varphi}_3 + M_0(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)$$ – dysypacja (rozpraszanie) mocy na przegubach plastycznych

$$L = q \times \frac{1}{2} l\, \dot{w}_0$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{\dot{w}_0}{x}, \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{w}_0}{l-x}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{w}_0}{x}$$

$$D = M_0 \dot{w}_0 \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{l-x}\right)$$

$$L = D \Rightarrow q(x) = \frac{2M_0}{l}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{l-x}\right)$$

Najlepszym (najbliższym rzeczywistego) obciążeniem granicznym jest obciążenie najmniejsze ze względu na X.

Stąd $\frac{d\,q(x)}{dx} = 0 \Rightarrow X$

$$\frac{2M_0}{l}\left[\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{(l-x)^2}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$2(l-x)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4lx + 2l^2 = 0$$

$$\Delta = 16l^2 - 8l^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}\,l$$

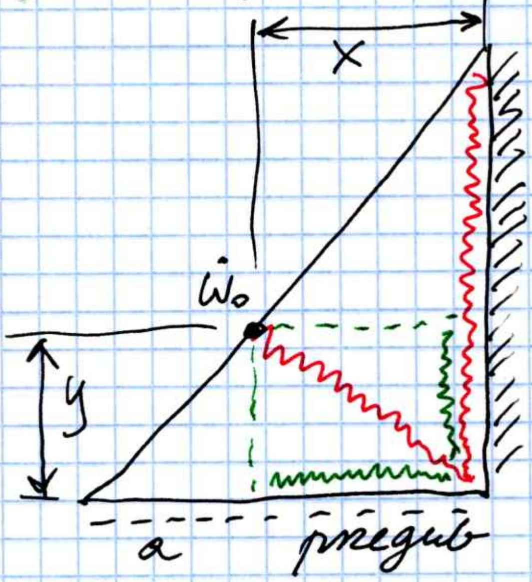
$$x_1 = \frac{4l - 2\sqrt{2}\,l}{2} = (2-\sqrt{2})l = 0{,}5858\,l$$

$$x_2 = \frac{4l + 2\sqrt{2}\,l}{2} > l \quad \text{(odpada)}$$

$$q^k = q(x_1) = \frac{2(3+2\sqrt{2})M_0}{l^2} = 11{,}66\,\frac{M_0}{l^2}$$

Uwaga!
Tego typu zadania (belki obciążone równomiernie) zawsze prowadzą do równania kwadratowego i jedno rozwiązanie odpada, a drugie odpowiada minimum funkcji $q(x)$ (nie trzeba sprawdzać!).

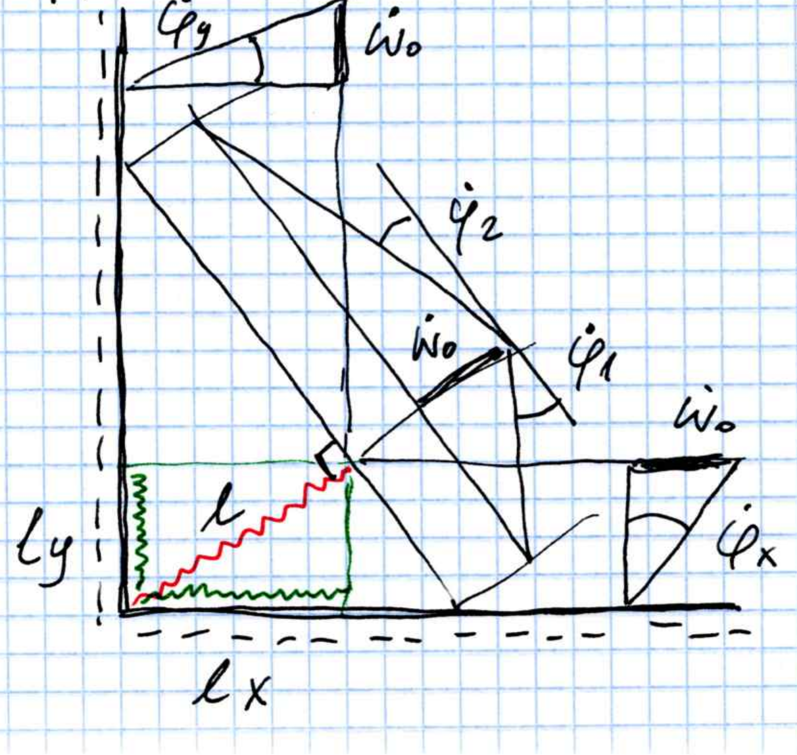
Dla dźwigara powierzchniowego, jakim jest płyta, nie wystarczą punktowe przeguby żeby powstał mechanizm zniszczenia plastycznego, a muszą powstać odpowiednie linie przegubów plastycznych, które nazywamy liniami załomów.
W naszym zadaniu można przyjąć dwie linie:



$$0 < x < a$$

$$\frac{y}{a-x} = \frac{b}{a} \Rightarrow y = b - \frac{b}{a}x$$

jedna na pionowym brzegu zamocowanym i druga sieczna od naroża prostokątnego, której nieznane położenie określimy przez parametr x. Zanim przejdziemy do rozwiązania problemu, podam wygodną w obliczeniach własność siecznej linii załomu



$$\dot{\varphi}_x = \frac{\dot{w}_0}{l_y}$$

$$\dot{\varphi}_y = \frac{\dot{w}_0}{l_x}$$

Dyssypację mocy na siecznej linii załomu liczymy z definicji

$$D_1 = M_0 \cdot l \cdot (\dot\varphi_1 + \dot\varphi_2)$$

gdzie $\dot\varphi_1 + \dot\varphi_2$ jest zmianą prędkości kąta obrotu między dwoma płatami płyty, a $M_0 = \frac{h^2}{4}\sigma_0$.
Zamiast tego wzoru (często trudnego w realizacji) można zastosować równoważne podejście

$$\underline{D_2 = M_0 \cdot l_x \cdot \dot\varphi_x + M_0 \cdot l_y \cdot \dot\varphi_y} = D_1$$

Moc obciążeń L obliczamy ze wzoru

$$L = \int_A q \cdot \dot w \, dA = q \int_A \dot w \, dA = q \cdot V_{\dot w}$$

gdzie $V_{\dot w}$ jest objętością bryły funkcji prędkości ugięcia $\dot w$ (w tym przypadku ostrosłupa o podstawie trójkątnej).

Przechodzimy do rozwiązania naszego zadania

$$L = \frac{1}{2} a b \cdot \frac{1}{3} \dot w_0 \cdot q = \frac{1}{6} a b q \dot w_0$$

$$D = \underbrace{M_0 \cdot x \frac{\dot w_0}{y} + M_0 \cdot y \frac{\dot w_0}{x}}_{\text{Sieczna}} + \underbrace{M_0 \cdot b \cdot \frac{\dot w_0}{x}}_{\text{zamocowanie}} \Rightarrow$$

$$D = M_0 \dot w_0 \left(\frac{x}{y} + \frac{y+b}{x} \right) = M_0 \dot w_0 \left(\frac{x}{b - \frac{b}{a}x} + \frac{2b - \frac{b}{a}x}{x} \right)$$

$$L = D \Rightarrow$$

$$q(x) = \frac{6 M_0}{a b} \left(\frac{x}{b - \frac{b}{a}x} + \frac{2b - \frac{b}{a}x}{x} \right)$$

Szukamy takiego x, które minimalizuje $q(x)$

$$\frac{dq(x)}{dx} = \frac{6M_0}{ab}\left[\frac{b - \cancel{\frac{b}{a}x} + \cancel{\frac{b}{a}x}}{(b-\frac{b}{a}x)^2} + \frac{-\cancel{\frac{b}{a}x} - (2b - \cancel{\frac{b}{a}x})}{x^2}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(b-\frac{b}{a}x)^2} = \frac{2}{x^2} \Rightarrow 2\left(b - \frac{b}{a}x\right)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right)x^2 - 4\frac{b^2}{a}x + 2b^2 = 0$$

Po wstawieniu $a = 5{,}1\,m$ i $b = 7{,}2\,m$ otrzymamy

$$2{,}9862x^2 - 40{,}6588 + 103{,}68 = 0$$

$$\Delta = 40{,}6588^2 - 4 \times 2{,}9862 \times 103{,}68 = 414{,}701$$

$$\sqrt{\Delta} = 20{,}364$$

$$x_1 = \frac{40{,}6588 - 20{,}364}{2 \times 2{,}9862} = 3{,}3981\,m$$

$$\cancel{x_2 = \frac{40{,}6588 + 20{,}364}{2 \times 2{,}9862} = 10{,}218\,m} > a = 5{,}1\,m$$

$$y_1 = \frac{7{,}2}{5{,}1}(5{,}1 - x_1) = 2{,}40268\,m$$

$$q^k = q(x_1) = \frac{6M_0}{ab}\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1 + b}{x_1}\right) = \frac{6 \times 105}{5{,}1 \times 7{,}2}\left(\frac{3{,}3981}{2{,}40268} + \frac{2{,}40268 + 7{,}2}{3{,}3981}\right)$$

Ostatecznie

$$\underline{\underline{q^k = 72{,}7484\,kPa}}$$

Uwaga!

Tutaj (w płytach trójkątnych i prostokątnych) też ma zastosowanie uwaga dotycząca belek.