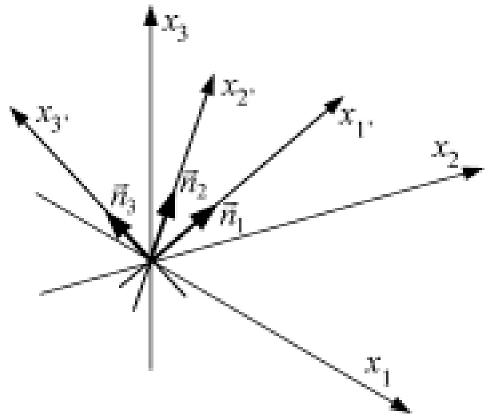
Przykład.

Dany jest tensor naprężenia w pewnym punkcie ciała

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć składowe tensora naprężenia w układzie osi wyznaczonym przez dane wektory jednostkowe.

$$\vec{n}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right],\ \vec{n}_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right], \vec{n}_3 = \left[-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right].$$



Rozwiązanie.

Policzmy niezmienniki tensora σ_{ij}.

$$I_1 = 90,\ I_2 = 0,\ I_3 = 0.$$

Aby skorzystać ze wzoru transformacyjnego

$$\sigma_{i'j'} = \alpha_{i'k}\,\alpha_{j'l}\,\sigma_{kl}\ ,$$

należy wyznaczyć najpierw współczynniki występujące we wzorze transformacyjnym

Zgodnie z definicją tych współczynników $\alpha_{i'j} = \cos\sphericalangle(x_{i'}, x_j)$, jest to kosinus kąta pomiędzy osią $x_{i'}$, a osią x_j.

Znajomość wektorów jednostkowych pozwala ustalić wartości współczynników $\alpha_{i'j}$ niemal natychmiast

$$\alpha_{1'1} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \alpha_{1'2} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \alpha_{1'3} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\alpha_{2'1} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \alpha_{2'2} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \alpha_{2'3} = 0,$$

$$\alpha_{3'1} = -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \alpha_{3'2} = -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \alpha_{3'3} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Możemy przystąpić do rachunków

$$\sigma_{1'1'} = \alpha_{1'1}\,\alpha_{1'1}\,\sigma_{11} + \alpha_{1'1}\,\alpha_{1'2}\,\sigma_{12} + \alpha_{1'1}\,\alpha_{1'3}\,\sigma_{13} +$$
$$+ \alpha_{1'2}\,\alpha_{1'1}\,\sigma_{21} + \underline{\alpha_{1'2}\,\alpha_{1'2}\,\sigma_{22}} + \alpha_{1'2}\,\alpha_{1'2}\,\sigma_{23} +$$
$$+ \alpha_{1'3}\,\alpha_{1'1}\,\sigma_{31} + \alpha_{1'3}\,\alpha_{1'2}\,\sigma_{32} + \alpha_{1'3}\,\alpha_{1'3}\,\sigma_{33}\,.$$

Zauważmy, że tylko podkreślony wyraz tej sumy jest niezerowy (tylko $\sigma_{22} \neq 0$). A zatem

$$\sigma_{1'1'} = \alpha_{1'2}\,\alpha_{1'2}\,\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}90 = 30.$$

Wyrażenia na pozostałe składowe uproszczą się w sposób analogiczny. Otrzymamy więc

$$\sigma_{1'2'} = \alpha_{1'2}\,\alpha_{2'2}\,\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}90 = \frac{90}{\sqrt{6}},$$

$$\sigma_{1'3'} = \alpha_{1'2}\,\alpha_{3'2}\,\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{-1}{\sqrt{6}}90 = \frac{-30}{\sqrt{2}},$$

$$\sigma_{2'1'} = \alpha_{2'2}\,\alpha_{1'2}\,\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}90 = \frac{90}{\sqrt{6}},$$

$$\sigma_{2'2'} = \alpha_{2'2}\,\alpha_{2'2}\,\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}90 = 45,$$

$$\sigma_{2'3'} = \alpha_{2'2}\,\alpha_{3'2}\,\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{\sqrt{6}}90 = \frac{-45}{\sqrt{3}},$$

$$\sigma_{3'1'} = \alpha_{3'2}\,\alpha_{1'2}\,\sigma_{22} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{3}}90 = \frac{-30}{\sqrt{2}},$$

$$\sigma_{3'2'} = \alpha_{3'2}\,\alpha_{2'2}\,\sigma_{22} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{2}}90 = \frac{-45}{\sqrt{3}},$$

$$\sigma_{3'3'} = \alpha_{3'2}\,\alpha_{3'2}\,\sigma_{22} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\frac{-1}{\sqrt{6}}90 = 15.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\sigma_{i'j'} = \begin{bmatrix} 30 & \frac{90}{\sqrt{6}} & \frac{-30}{\sqrt{2}} \\ \frac{90}{\sqrt{6}} & 45 & \frac{-45}{\sqrt{3}} \\ \frac{-30}{\sqrt{2}} & \frac{-45}{\sqrt{3}} & 15 \end{bmatrix}.$$

Policzmy niezmienniki

$$I_1 = 30 + 45 + 15 = 90,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 30 & \frac{90}{\sqrt{6}} \\ \frac{90}{\sqrt{6}} & 45 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 30 & \frac{-30}{\sqrt{2}} \\ \frac{-30}{\sqrt{2}} & 15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 45 & \frac{-45}{\sqrt{3}} \\ \frac{-45}{\sqrt{3}} & 15 \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_3 = \det[\sigma_{i'j'}] = 0.$$