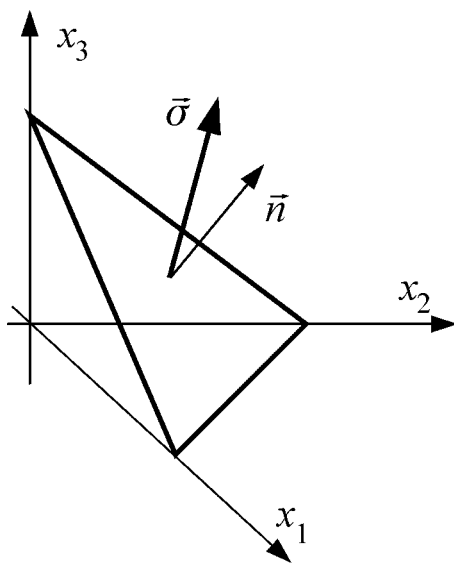


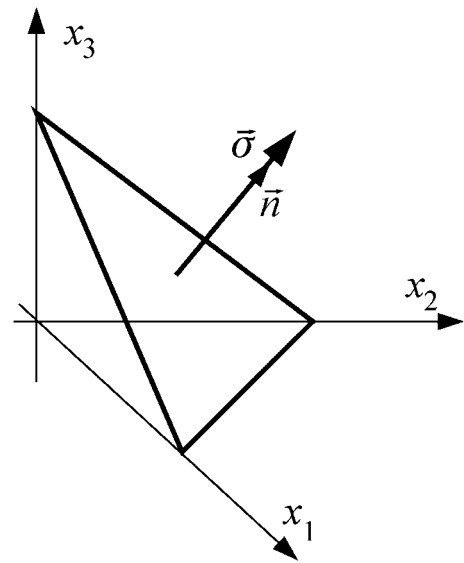
Wykład 2

Naprężenia główne

Poszukajmy płaszczyzny dowolnie nachylonej do osi układu współrzędnych i o tej własności, by wektor naprężenia na tej płaszczyźnie był współlosiowy z wektorem \vec{n} , wektorem który orientuje tę płaszczyznę w przestrzeni (wektorem do niej normalnym).



a) przypadek ogólny,



b) płaszczyzna główna.

Oznaczmy przez s_j składowe tego wektora. Wektor ten możemy zapisać tak:

$$\vec{\sigma}^{(n)} = s_j \vec{e}_j. \quad (1)$$

Z postulatu współliniowości wektora $\vec{\sigma}^{(n)}$ z wektorem \vec{n} wynika

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \sigma \vec{n}, \quad (2)$$

albo

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \sigma n_j \vec{e}_j \quad (3)$$

gdzie σ jest długością poszukiwanego wektora.

Porównajmy (1) z (3).

$$s_j \vec{e}_j = \sigma n_j \vec{e}_j, \quad (4)$$

ale

$$s_j = \sigma_{ij} n_i \quad (5)$$

Z (4) i (5) otrzymamy

$$\sigma_{ij} n_i = \sigma n_j \quad (6)$$

albo

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_i = 0 \quad (7)$$

Jest to jednorodny układ liniowych równań algebraicznych, w którym niewiadomymi są

$$\sigma, n_i \quad (8)$$

Mamy zatem cztery niewiadome i trzy równania (7). Brakujące równanie wynika ze znanej długości wektora \vec{n} (długość jednostkowa)

$$n_i n_i = 1 \quad (9)$$

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań układu (7) jest znikanie wyznacznika

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0 \quad (10)$$

Rozpisanie tego warunku prowadzi do równania algebraicznego trzeciego rzędu na poszukiwane σ .

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (11)$$

gdzie

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\sigma_{kk} \sigma_{mm} - \sigma_{ij} \sigma_{ij}), \quad (12)$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Jest to równanie wiekowe (sekularne) Laplace'a, a jego parametrami są niezmienniki tensora naprężenia zdefiniowane poprzednio.

Równanie wiekowe ma zawsze trzy pierwiastki rzeczywiste $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Nazywamy je naprężeniami głównymi. Po uporządkowaniu tworzą trójkę uporządkowanych naprężeń głównych: $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, przy czym

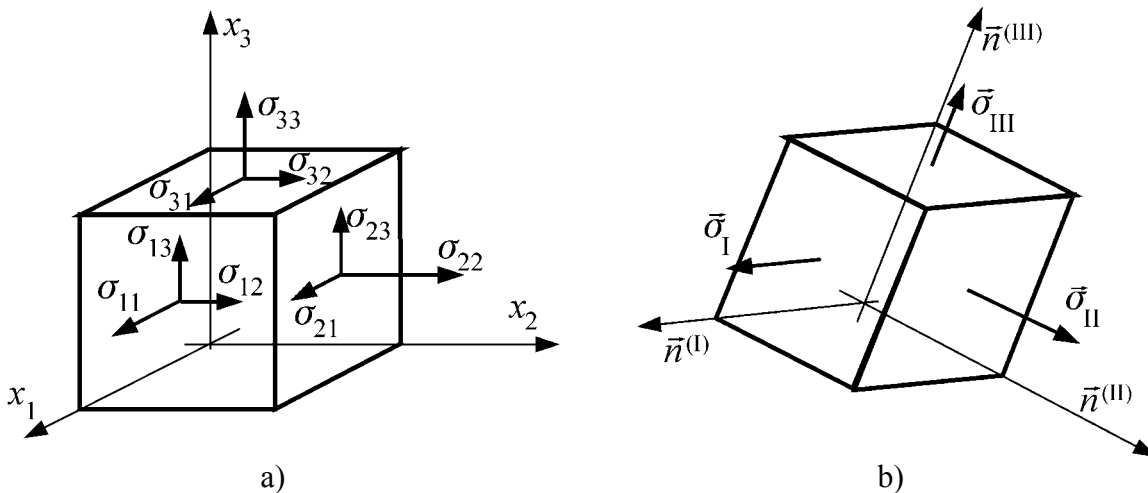
$$\begin{aligned}
\sigma_I &= \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \\
\sigma_{III} &= \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\
\sigma_{II} &= \text{wartość pośrodkowa,} \\
\sigma_I &\geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}
\end{aligned}
\tag{13}$$

Wróćmy do równania (7) aby wyznaczyć kierunki odpowiadające kolejnym naprężeniom głównym. Za σ podstawiamy kolejno $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ i wyliczamy składowe wektorów $\vec{n}^{(I)}, \vec{n}^{(II)}, \vec{n}^{(III)}$. W przypadku poszukiwania kierunku $\vec{n}^{(I)}$, układ (7) przyjmie postać

$$(\sigma_{ij} - \sigma_I \delta_{ij})n_i = 0.
\tag{14}$$

Układ ten należy każdorazowo uzupełnić warunkiem (9).

Można pokazać, że osie główne tensora naprężenia opisane wektorami $\vec{n}^{(I)}, \vec{n}^{(II)}, \vec{n}^{(III)}$ są zawsze do siebie prostopadłe.



W ten sposób pokazaliśmy, że dowolny stan naprężenia zilustrowany na rys. a można zawsze sprowadzić do stanu naprężenia odpowiadającego działaniu trzech naprężeń normalnych na trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny (por. rys b). Mówiąc obrazowo, efekt ten można osiągnąć poprzez umiejętny obrót kostki sześciennej na ściankach której uwidoczniono składowe stanu naprężenia. Na rysunkach pokazano jedynie naprężenia na widocznych płaszczyznach. Na trzech niewidocznych występują naprężenia wynikające z warunku równowagi myślowo wydzielonej kostki sześciennej.

Koło Mohra

Jeżeli w danym punkcie ośrodka znane są naprężenia główne $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, to stan naprężenia w tym punkcie panujący na płaszczyźnie dowolnie nachylonej do kierunków głównych (por. rys.) można wyznaczyć za pomocą konstrukcji graficznej zwanej kołem Mohra.

Niech wektor tworzy z osiami głównymi kąty α, β, γ odpowiednio. Mamy więc

$$n_1 = \cos \alpha, \quad n_2 = \cos \beta, \quad n_3 = \cos \gamma, \quad n_i n_i = 1. \quad (15)$$

Konstrukcja koła Mohra pokazanego na rys. przebiega następująco.

Na osi odciętych zaznaczamy trzy punkty M_1, M_2, M_3 odpowiadające wartościom naprężeń głównych. Wykreślamy trzy okręgi oparte na odcinkach M_3M_1, M_3M_2, M_2M_1 (por. rysunek). Prowadzimy odcinek M_1A pod kątem α oraz odcinek M_3B pod kątem γ . Zakreślamy łuki $O_3 : A \rightarrow C$ i $O_2 : B \rightarrow C$. Punkt C odcina na osiach σ i τ , i są to poszukiwane naprężenia.

Wnioski z konstrukcji koła Mohra.

1. σ_I jest największym, a σ_{III} – najmniejszym ze wszystkich możliwych naprężeń normalnych jakie mogą wystąpić w tym punkcie.

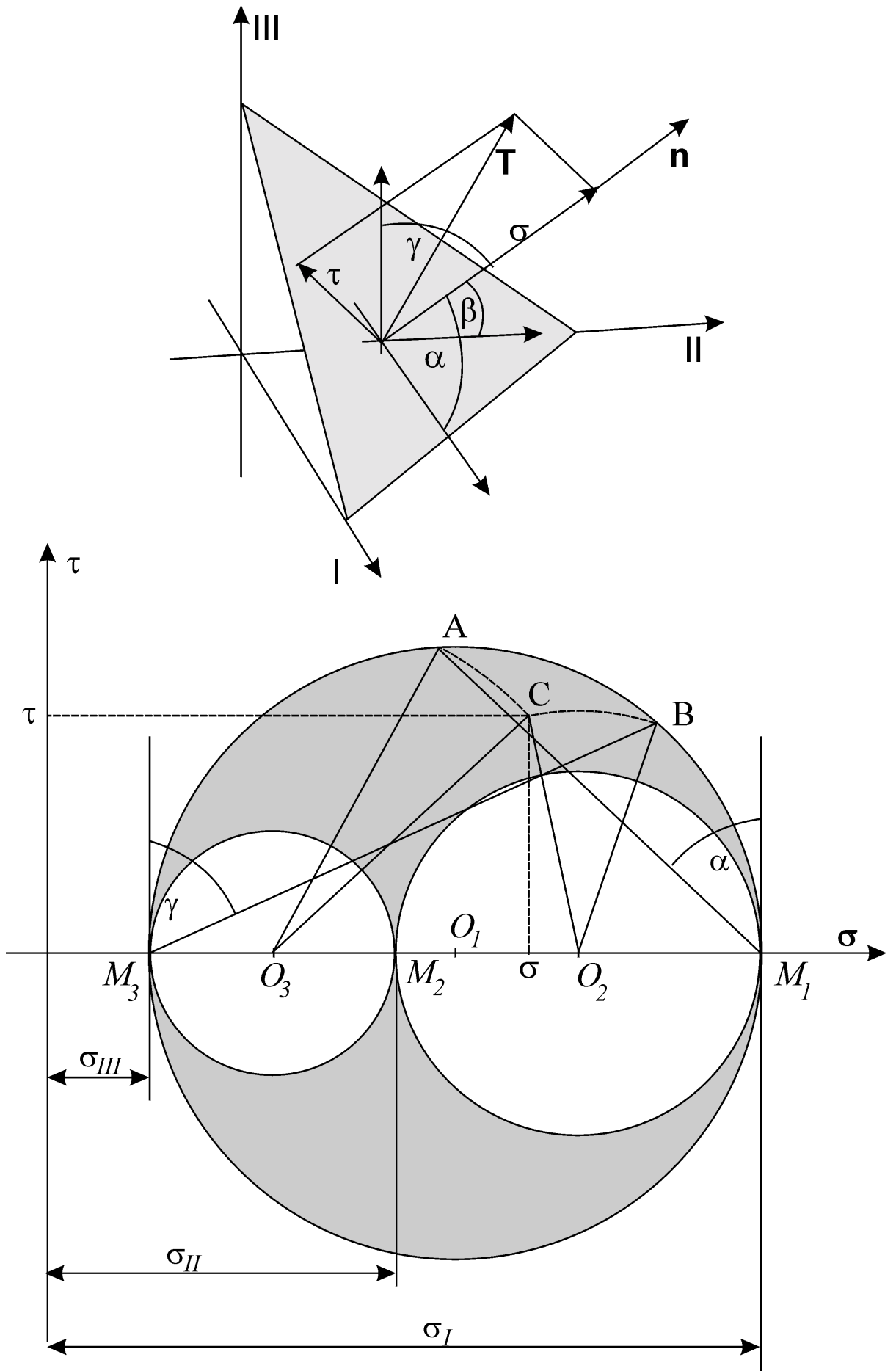
2. Maksymalne naprężenia styczne występują na płaszczyznach nachylonych pod kątem 45° do kierunków głównych I i III . Wartości tych naprężeń są równe promieniowi największego koła i wynoszą

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}. \quad (16)$$

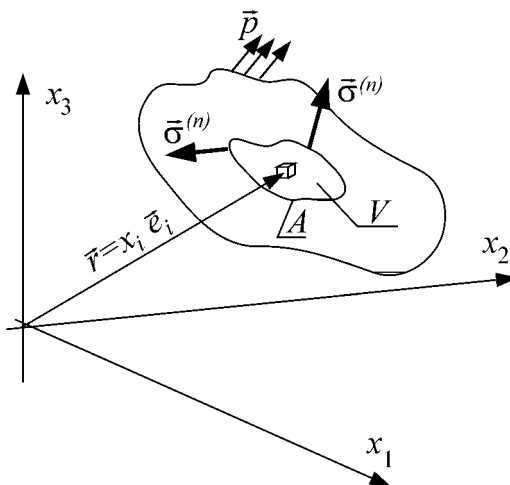
Towarzyszą im naprężenia normalne

$$\sigma = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}. \quad (17)$$

3. Możliwe stany naprężenia to tylko te z obszaru zaciemnionego.



Różniczkowe równania równowagi wewnętrznej.



Rozważmy równowagę sił działających na wydzieloną część ciała pozostającego w równowadze. Na każdą jednostkę objętości ciała działa wektor sił objętościowych

$$\vec{X} = X_i \vec{e}_i. \quad (18)$$

Wektorowy warunek równowagi wydzielonej części ciała zapiszemy tak

$$\int_A \vec{\sigma}^{(n)} dA + \int_V \vec{X} dV = 0, \quad (19)$$

$$\int_A s_j \vec{e}_j dA + \int_V X_j \vec{e}_j dV = 0, \quad (20)$$

ale

$$s_j = \sigma_{ij} n_i \quad (21)$$

$$\vec{e}_j \left(\int_A \sigma_{ij} n_i dA + \int_V X_j dV \right) = 0, \quad (22)$$

Twierdzenie Gaussa–Ostrogradzkiego

$$\int_A F n_j dA = \int_V F_{,j} dV, \quad (23)$$

pozwala zamienić całkę powierzchniową na całkę objętościową. Wykorzystamy je do pierwszej całki.

Otrzymamy

$$\int_V \sigma_{ij,i} dV + \int_V X_j dV = 0, \quad (24)$$

czyli

$$\sigma_{ij'i} + X_j = 0. \quad (25)$$

Tak otrzymaliśmy różniczkowe równania równowagi wewnętrznej nazywane równaniami Naviera.

Rozważmy teraz równanie równowagi momentów względem początku układu współrzędnych. Wektorowy warunek równowagi momentowej wydzielonej części ciała zapiszemy tak

$$\int_A \vec{r} \times \vec{\sigma}^{(n)} dA + \int_V \vec{r} \times \vec{X} dV = 0, \quad (26)$$

ale

$$\vec{a} \times \vec{b} = e_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k, \quad (27)$$

gdzie e_{ijk} jest symbolem permutacyjnym.

$$\int_A e_{ijk} x_i s_j \vec{e}_k dA + \int_V e_{ijk} x_i X_j \vec{e}_k dV = 0, \quad (28)$$

ale

$$s_j = \sigma_{mj} n_m \quad (29)$$

$$e_{ijk} \vec{e}_k \left(\int_A x_i \sigma_{mj} n_m dA + \int_V x_i X_j dV \right) = 0, \quad (30)$$

Pierwszą całkę zamienimy na całkę objętościową korzystając z twierdzenie Gaussa–Ostrogradzkiego. Otrzymamy

$$e_{ijk} \vec{e}_k \left(\int_A (x_i \sigma_{mj})_{,m} dV + \int_V x_i X_j dV \right) = 0, \quad (33)$$

Po dalszych przekształceniach otrzymamy

$$e_{ijk} \vec{e}_k \left(\int_V \delta_{im} \sigma_{mj} dV + \int_V x_i \sigma_{mj'm} dV + \int_V x_i X_j dV \right) = 0, \quad (32)$$

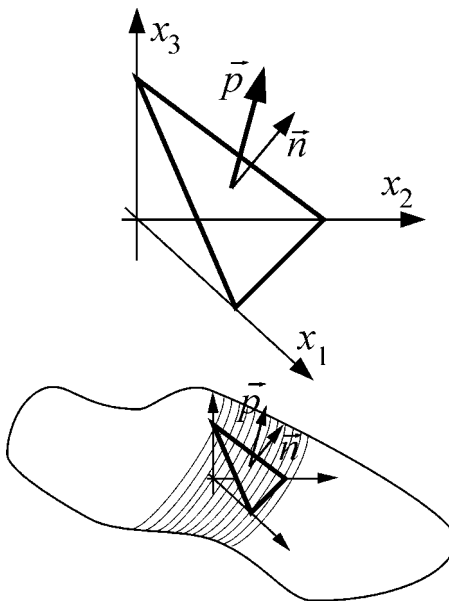
Na mocy równań Naviera (25) wyrazy podkreślone znikają. Pozostaje zatem

$$e_{ijk} \sigma_{ij} = 0, \quad (33)$$

Otrzymaliśmy tzw. warunki Cauchy'ego, które muszą być spełnione przez składowe tensora naprężenia. Wynika z nich symetria tensora naprężenia

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (34)$$

Naprężeniowe warunki brzegowe



Jeśli rozważymy równowagę czworościanu przyległego do powierzchni zewnętrznej ciała, na którą działają rozłożone obciążenia powierzchniowe, to zamiast związku

$$s_j = \sigma_{ij} n_i \quad (35)$$

otrzymamy

$$p_j = \sigma_{ij} n_i \quad (36)$$

Tą zależnością związane są składowe wektora powierzchniowych obciążeń zewnętrznych ze składowymi tensora naprężenia w dowolnym punkcie powierzchni zewnętrznej rozpatrywanego ciała.

Przykład

Stan naprężenia w pewnym ciele jest opisany w sposób następujący

$$\sigma_{11} = 2b x_1, \quad \sigma_{11} = 6a x_1 x_2,$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = -3a x_1^2 - 2b x_2,$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0,$$

$$\sigma_{33} = -C x_3.$$

Sprawdzić równania Naviera jeśli wiadomo, że $X_1 = X_2 = 0$, $X_3 = C$

Rozpiszmy równania Naviera: $\sigma_{ij,i} + X_j = 0$.

Pierwsze równanie:

$$\sigma_{11'1} + \sigma_{21'2} + \sigma_{31'3} + X_1 = 0.$$

Po podstawieniu

$$2b - 2b + 0 = 0 \text{ – jest spełnione.}$$

Kolejne równania

$$\sigma_{12'1} + \sigma_{22'2} + \sigma_{32'3} + X_2 = 0.$$

$$-6a x_1 + 6a x_1 + 0 = 0 \text{ – jest spełnione,}$$

$$\sigma_{13'1} + \sigma_{23'2} + \sigma_{33'3} + X_3 = 0.$$

$$-C + C = 0 \text{ – też jest spełnione.}$$