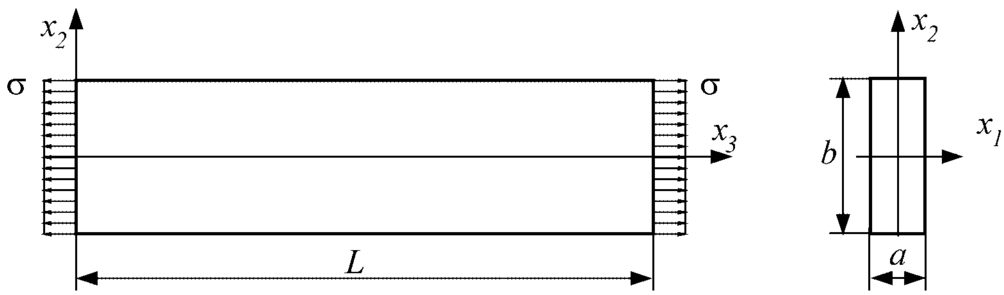
Przykład

Rozważmy rozciąganie nieważkiego $(X_i = 0)$ pręta pryzmatycznego jak na rys. Pręt jest unieruchomiony w punkcie $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.$



Mamy do czynienia z mieszanymi warunkami brzegowymi, jest to więc zadanie trzeciego typu. Zastosujemy tu sformułowanie bezpośrednie zakładając, że tylko $\sigma_{33} \neq 0$.

Z równań równowagi (równań Naviera) otrzymamy

$$\sigma_{ij'i} + X_j = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sigma_{11'1} + \sigma_{21'2} + \sigma_{31'3} = 0 \\ \sigma_{12'1} + \sigma_{22'2} + \sigma_{32'3} = 0 \\ \sigma_{13'1} + \sigma_{23'2} + \sigma_{33'3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_{33} = \varphi(x_1, x_2).$$

Z naprężeniowych warunków brzegowych

$$p_i = \sigma_{ji} n_j \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 \\ p_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 \\ p_3 = \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p_1 = 0 \\ p_2 = 0 \\ p_3 = \sigma_{33}n_3 \end{array}$$

Na ścianach nieobciążonych

$$n_3 = 0.$$

Naprężeniowe warunki brzegowe na tych ścianach są więc spełnione.

Ścianki obciążone.

Ściana $x_3 = L,\ n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 1,\ p_3 = \sigma.$

Otrzymujemy

$$p_3 = \sigma_{33} n_3,$$
$$\sigma = \varphi(x_1, x_2).$$

Skąd wynika że funkcja $\varphi(x_1, x_2)$ jest funkcją stałą. A zatem

$$\sigma_{33} = \varphi(x_1, x_2) = \sigma.$$

Ściana $x_3 = 0$, $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = -1$, $p_3 = -\sigma$.

Otrzymujemy

$$p_3 = \sigma_{33} n_3,$$
$$-\sigma = -\sigma.$$

Naprężeniowy warunek brzegowy jest spełniony.

Przejdźmy to związków konstytutywnych.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}\right].$$

Otrzymamy z nich

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\nu\,\sigma_{33}}{E} = -\frac{\nu\,\sigma}{E},\ \ \varepsilon_{22} = -\frac{\nu\,\sigma}{E},\ \ \varepsilon_{11} = \frac{\sigma}{E},$$
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

Znamy więc stan odkształcenia w każdym punkcie pręta

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma}{E}\begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

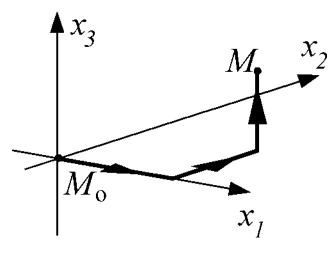
Przejdźmy do przemieszczeń.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i'j} + u_{j'i}\right).$$

$$\varepsilon_{11} = u_{1'1},\ \ \varepsilon_{22} = u_{2'2},\ \ \varepsilon_{33} = u_{3'3},$$

czyli

$$u_{1'1} = -\frac{\nu\,\sigma}{E},\ \ u_{2'2} = -\frac{\nu\,\sigma}{E},\ \ u_{3'3} = \frac{\sigma}{E}.$$



Przemieszczenia policzymy korzystając z wyrażenia na różniczkę zupełną:

$$du_i(x_1, x_2, x_3) = u_{i'1}dx_1 + u_{i'2}dx_2 + u_{i'3}dx_3 = u_{i'j}dx_j.$$

$$u_i(x_1,x_2,x_3)=u_i(x_1^0,x_2^0,x_3^0)+\int_0^{x_1}u_{i'1}dx_1\Big|_{\substack{x_2=0\\x_3=0}}+\int_0^{x_2}u_{i'2}dx_2\Big|_{x_3=0}+\int_0^{x_3}u_{i'3}dx_3=$$

$$=u_i^0+\int_{M_0}^{M}u_{i'j}dx_j$$

Potrzebne w tym rachunku $u_{i'j}$ też policzymy z wyrażeń na różniczkę zupełną:

$$du_{i'j}=u_{i'jk}\ dx_k\,,$$

$$u_{i'j}(x_1,x_2,x_3)=u_{i'j}^{\,0}+\int_{M_0(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}^{M(x_1,x_2,x_3)}u_{i'jk}dx_k\,.$$

Tu jednak będą potrzebne pochodne $u_{i'jk}$.

Zauważmy rzecz następującą:

$$u_{i'j}=\underbrace{\frac{1}{2}\left(u_{i'j}+u_{j'i}\right)}_{\varepsilon_{ij}}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(u_{i'j}-u_{j'i}\right)}_{\omega_{ij}}.$$

Policzmy pochodną

$$u_{i'jk}=\varepsilon_{ij'k}+\omega_{ij'k}\,.$$

Obliczamy kolejno

$$\omega_{ij'k}=\frac{1}{2}\left(u_{i'jk}-u_{j'ik}\right),$$

co możemy zapisać też tak

$$\omega_{ij'k}=\frac{1}{2}\left(u_{i'jk}-u_{j'ik}\right)+\frac{1}{2}\left(u_{k'ij}-u_{k'ij}\right),$$

i dalej,

$$\omega_{ij'k}=\frac{1}{2}\left(u_{i'kj}+u_{k'ij}\right)-\frac{1}{2}\left(u_{j'ki}+u_{k'ji}\right).$$

Dostaliśmy więc

$$\omega_{ij'k}=\varepsilon_{ik'j}-\varepsilon_{jk'i}\,.$$

Poszukiwane wyrażenie na drugą pochodną przyjmie postać

$$u_{i'jk} = \varepsilon_{ij'k} + \varepsilon_{ik'j} - \varepsilon_{jk'i}$$

Zauważmy, że w rozpatrywanym przypadku ε_{ij} nie zależą od x_i, zatem wszystkie pochodne

$$\varepsilon_{ij'k} \equiv 0,$$

i w konsekwencji wszystkie drugie pochodne

$$u_{i'jk} \equiv 0.$$

Policzmy kolejno $u_{i'j}$.

Przyjmijmy, że w punkcie (0, 0, 0)

$$u_{1'2} = u_{2'1} = u_{1'3} = u_{3'1} = u_{2'3} = u_{3'2} = 0.$$

Możemy obliczyć

$$u_{i'j}(x_1, x_2, x_3) = u^0_{i'j} + \int_{M_0}^{M} u_{i'jk} dx_k = u^0_{i'j}\ .$$

Dostajemy zatem:

$$u_{1'1} = -\frac{\nu\sigma}{E},\ \ u_{2'2} = -\frac{\nu\sigma}{E},\ \ u_{3'3} = \frac{\sigma}{E},$$

a pozostałe pierwsze pochodne są równe zeru.

Możemy przystąpić do obliczenia samych przemieszczeń.

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u^0_i + \int_{M_0}^{M} u_{i'j} dx_k\ .$$

Przyjmijmy, że

$$u^0_i = u_i(0,0,0) \equiv 0,$$

gdyż ten punkt jest nieruchomy.

Obliczmy

$$u_1 = \int_0^{x_1} u_{1'1}\Big|_{\substack{x_2=0\\ x_3=0}} dx_1 + \int_0^{x_2} u_{1'2}\Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} u_{1'3} dx_3 - \frac{\nu\sigma}{E} x_1\ ,$$

$$u_2 = \int_0^{x_1} u_{2'1}\Big|_{\substack{x_2=0\\x_3=0}} dx_1 + \int_0^{x_2} u_{2'2}\Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} u_{2'3} dx_3 = -\frac{\nu\sigma}{E} x_2 \,,$$

$$u_3 = \int_0^{x_1} u_{3'1}\Big|_{\substack{x_2=0\\x_3=0}} dx_1 + \int_0^{x_2} u_{3'2}\Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} u_{3'3} dx_3 = \frac{\nu\sigma}{E} x_3 \,,$$

W szczególności przemieszczenia wzdłużne końca pręta

$$u_3(x_1, x_2, L) = \frac{\sigma L}{E} \,.$$