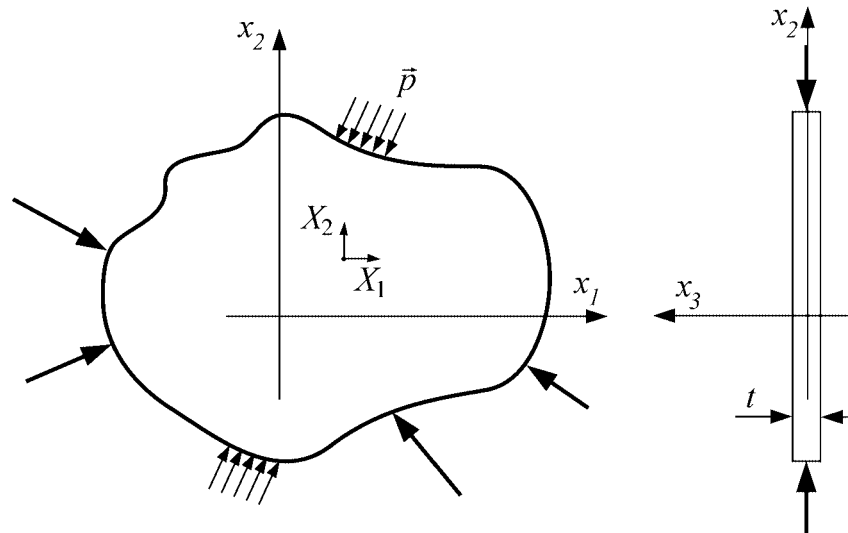


Wykład 5

PŁASKIE ZADANIE TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Płaski stan naprężenia

W wielu przypadkach zadanie teorii sprężystości daje się zredukować do dwóch



wymiarów. Przykładem może być cienka tarcza obciążona siłami działającymi w jej płaszczyźnie (por. rys.). Na powierzchniach $n_i = \pm x_3$, $\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$, gdyż te powierzchnie są wolne od obciążeń. Wobec małej grubości możemy przyjąć, że

$$\sigma_{33}, \sigma_{32}, \sigma_{31}$$

są pomijalnie małe wewnątrz tarczy. W dowolnym punkcie tarczy mamy zatem następujący stan naprężenia,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2),$$

nie zależą więc od x_3 . Jest to przypadek płaskiego stanu naprężenia.

Różniczkowe równania równowagi (równania Naviera) przyjmą tu postać taką

$$\sigma_{ij'i} + X_j = 0,$$

albo po rozpisaniu

$$\sigma_{11'1} + \sigma_{21'2} + \sigma_{31'3} + X_1 = 0,$$

$$\sigma_{12'1} + \sigma_{22'2} + \sigma_{32'3} + X_2 = 0,$$

$$\sigma_{13'1} + \sigma_{23'2} + \sigma_{33'3} + X_3 = 0.$$

Trzecie równanie jest spełnione tożsamościowo gdyż $X_3=0$ (nie ma żadnych obciążeń w tym kierunku).

Z dwóch pierwszych równań dostaniemy

$$\begin{aligned}\sigma_{11}'_1 + \sigma_{21}'_2 + X_1 &= 0, \\ \sigma_{12}'_1 + \sigma_{22}'_2 + X_2 &= 0.\end{aligned}$$

Zapiszmy naprężeniowe warunki brzegowe

$$p_j = \sigma_{ij} n_i,$$

które po rozpisaniu przyjmują postać

$$\begin{aligned}p_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3, \\ p_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3, \\ p_3 &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3.\end{aligned}$$

Tu także trzecie równanie jest spełnione tożsamościowo gdyż $p_3=0$ (nie ma żadnych obciążeń w tym kierunku), a z dwóch pierwszych otrzymujemy

$$\begin{aligned}p_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2, \\ p_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2.\end{aligned}$$

Zapiszmy jeszcze związki geometryczne – równania Cauchy’ego.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i'j} + u_{j'i}),$$

z których po rozpisaniu otrzymujemy

$$\varepsilon_{11} = u_{1'1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2'2}, \quad \varepsilon_{3'3} = u_{3'3}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1'2} + u_{2'1}).$$

Pozostałe $\varepsilon_{ij} = 0$, a wynika to ze związków fizycznych

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right].$$

W dowolnym punkcie tarczy mamy zatem następujący stan odkształcenia,

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2),$$

Warto zwrócić uwagę, że płaskiemu stanowi naprężenia towarzyszy przestrzenny stan odkształcenia (tu pojawia się także ε_{33}).

Kolejną grupą równań są warunki nierozdzielności.

Spośród sześciu warunków

$$e_{ikm}e_{jln}\varepsilon_{klmn} = 0,$$

pozostaje tu tylko jeden, dla $j=i=3$

$$\varepsilon_{11'22} + \varepsilon_{22'11} = 2\varepsilon_{12'12}.$$

Mamy jeszcze do dyspozycji związki fizyczne w postaci uogólnionego prawa Hooke'a

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}].$$

Rozpiszmy je

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}),$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}),$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [-\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \Rightarrow \sigma_{11} + \sigma_{22} = -\frac{E\varepsilon_{33}}{\nu},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 0.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} + \sigma_{22} - \nu\sigma_{11}),$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \frac{1-\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

a korzystając z wyrażenia na sumę naprężeń wyprowadzonego wyżej

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = -\frac{E\varepsilon_{33}}{\nu},$$

otrzymamy

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \frac{1-\nu}{-\nu}\varepsilon_{33},$$

albo

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}).$$

Taką zależnością związane są odkształcenia ε_{33} z odkształceniami ε_{11} i ε_{22} .

Odwróćmy jeszcze związki fizyczne otrzymane wyżej

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}),$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}).$$

Po rozwiązaniu względem składowych stanu naprężenia otrzymamy

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}),$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}),$$

oraz

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12}.$$

Płaski stan odkształcenia

Przykładem ciała, w którym występuje płaski stan odkształcenia może być tunel, rurociąg, inna konstrukcja której wymiar wzdłużny znacznie przewyższa pozostałe wymiary (por. rys). Wszystkie obciążenia powinny działać prostopadle do osi wzdłużnej i powinny być stałe na długości obiektu. Warunki podparcia nie powinny się zmieniać w kierunku osi x_3 , stąd

$$u_3 = 0$$

a u_1, u_2 zależą tylko od x_1, x_2 .

Mamy zatem

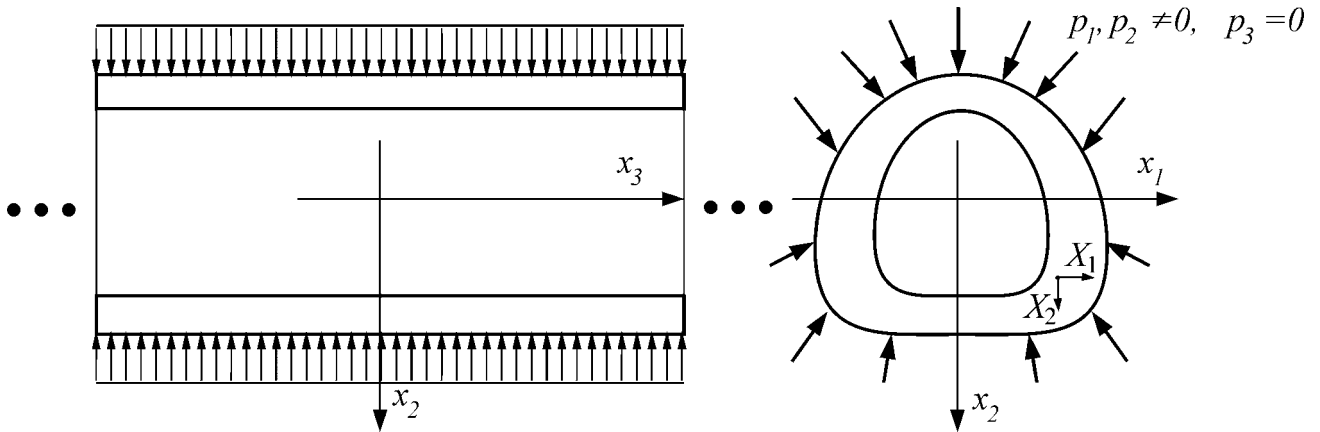
$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0.$$

Z równań Cauchy'ego

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i'j} + u_{j'i}),$$

otrzymamy

$$\varepsilon_{11} = u_{1'1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2'2}, \quad \varepsilon_{3'3} = u_{3'3} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1'2} + u_{2'1}), \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$



W każdym punkcie takiego obiektu występuje następujący stan odkształcenia

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i wszystkie $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2)$.

Jest to przypadek płaskiego stanu odkształcenia.

Ze związków fizycznych

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}],$$

otrzymujemy

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})],$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu[\sigma_{22} + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})]],$$

skąd

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{11}(1-\nu^2) - \sigma_{22}\nu(1+\nu) \right],$$

i ostatecznie

$$\varepsilon_{11} = \frac{1-\nu^2}{E} \left[\sigma_{11} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{22} \right].$$

Analogicznie

$$\varepsilon_{22} = \frac{1-\nu^2}{E} \left[\sigma_{22} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{11} \right].$$

Z pozostałych związków fizycznych otrzymamy

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 0.$$

Wprowadźmy nowe stałe materiałowe

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Wyprowadzone powyżej związki fizyczne przyjmą postać

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}),$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}),$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu_1}{E_1} \sigma_{12},$$

gdyż zachodzi zależność

$$\frac{1+\nu}{E} = \frac{1+\nu_1}{E_1},$$

którą można łatwo sprawdzić.

Są to związki identyczne ze związkami fizycznymi dla płaskiego stanu naprężenia. Różnica tkwi tylko w stałych materiałowych. Tam występowały E i ν , a tu E_1 i ν_1 .

Odwróćmy otrzymane związki. Otrzymamy

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} (\varepsilon_{11} + \nu_1 \varepsilon_{22}),$$

$$\sigma_{22} = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} (\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11}),$$

$$\sigma_{12} = \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{12}$$

oraz związek otrzymany poprzednio

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

W każdym punkcie obiektu mamy do czynienia z następującym stanem naprężenia

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2),$$

Warto zwrócić uwagę, że płaskiemu stanowi odkształcenia towarzyszy przestrzenny stan naprężenia (tu pojawia się także σ_{33}).

Mamy do dyspozycji równania równowagi (równania Naviera)

$$\sigma_{ij'i} + X_j = 0,$$

albo po rozpisaniu

$$\sigma_{11'1} + \sigma_{21'2} + \sigma_{31'3} + X_1 = 0,$$

$$\sigma_{12'1} + \sigma_{22'2} + \sigma_{32'3} + X_2 = 0,$$

$$\sigma_{13'1} + \sigma_{23'2} + \sigma_{33'3} + X_3 = 0.$$

Trzecie równanie jest spełnione tożsamościowo gdyż $X_3=0$ (nie ma żadnych obciążeń w tym kierunku), a σ_{33} nie zależy od x_3 .

Z dwóch pierwszych równań dostaniemy

$$\sigma_{11'1} + \sigma_{21'2} + X_1 = 0,$$

$$\sigma_{12'1} + \sigma_{22'2} + X_2 = 0.$$

Naprężeniowe warunki brzegowe:

$$p_j = \sigma_{ij} n_i,$$

albo po rozpisaniu

$$\begin{aligned} p_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3, \\ p_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3, \\ p_3 &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3. \end{aligned}$$

Tu także trzecie równanie jest spełnione tożsamościowo gdyż $p_3=0$ (nie ma żadnych obciążeń w tym kierunku) i $n_3=0$. Z dwóch pierwszych otrzymujemy

$$\begin{aligned} p_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2, \\ p_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2. \end{aligned}$$

W tym przypadku także mamy do dyspozycji jeden warunek nierozdzielności.

$$\varepsilon_{11'22} + \varepsilon_{22'11} = 2\varepsilon_{12'12}.$$

Analizując wszystkie równania dla płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia, można zauważyć, że są one identyczne. Różnica w stałych (w związkach fizycznych E i ν w płaskim stanie naprężenia i E_1 i ν_1 w płaskim stanie odkształcenia) jest bez znaczenia jeśli chodzi o matematyczną stronę problemu. Z tego powodu szczegóły rozwiązania zagadnienia płaskiego analizować będziemy dalej tylko w odniesieniu do płaskiego stanu naprężenia.

Zestawmy wszystkie równania dotyczące płaskiego stanu naprężenia.

$$\sigma_{11'1} + \sigma_{21'2} + X_1 = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_{12'1} + \sigma_{22'2} + X_2 = 0.$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2, \\ p_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{11'22} + \varepsilon_{22'11} = 2\varepsilon_{12'12} \tag{3}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}),$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}), \tag{4}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}.$$

Rozwiązanie otrzymamy w sposób następujący.

Policzmy pochodne występujące w (3).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11'22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11'22} - \nu \sigma_{22'22}), \\ \varepsilon_{22'11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22'11} - \nu \sigma_{11'11}), \\ \varepsilon_{12'12} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12'12},\end{aligned}\tag{5}$$

i podstawmy to do (3).

$$\sigma_{11'22} - \nu \sigma_{22'22} + \sigma_{22'11} - \nu \sigma_{11'11} = 2(1+\nu)\sigma_{12'12}\tag{6}$$

Równania (1) i (6) stanowią układ trzech równań z trzema niewiadomymi. Zróżniczkujemy (1)₁ po x_1 i (1)₂ po x_2 .

$$\begin{aligned}\sigma_{11'11} + \sigma_{21'21} + X_{1'1} &= 0, \\ \sigma_{12'12} + \sigma_{22'22} + X_{2'2} &= 0,\end{aligned}\tag{7}$$

i dodajmy te równania stronami. Otrzymamy

$$2\sigma_{12'12} + \sigma_{11'11} + \sigma_{22'22} + X_{1'1} + X_{2'2} = 0,\tag{8}$$

Weźmy stąd $2\sigma_{12'12}$ i podstawmy do (6). Otrzymamy

$$\sigma_{11'22} - \nu \sigma_{22'22} + \sigma_{22'11} - \nu \sigma_{11'11} = -(1+\nu)(\sigma_{11'11} + \sigma_{22'22} + X_{1'1} + X_{2'2})$$

Możemy to dalej przekształcić tak

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,11} + (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{,22} = -(1+\nu)(X_{1'1} + X_{2'2}),$$

albo

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1+\nu)(X_{1'1} + X_{2'2}),\tag{9}$$

gdzie $\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2}$, to laplasjan.

Równanie (9) nosi nazwę warunku Morisa–Levy’ego.

Mamy teraz układ trzech równań w postaci

$$\begin{aligned}\sigma_{11'1} + \sigma_{21'2} + X_1 &= 0, \\ \sigma_{12'1} + \sigma_{22'2} + X_2 &= 0, \\ \nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) &= -(1+\nu)(X_{1'1} + X_{2'2}).\end{aligned}\tag{10}$$

Wprowadźmy funkcję Airy’ego zdefiniowaną w sposób następujący

$$\sigma_{11} = F_{,22}, \quad \sigma_{22} = F_{,11}, \quad \sigma_{12} = -F_{,12} - X_1 x_2 - X_2 x_1,\tag{11}$$

Założmy, że tarcza wykonana jest z materiału jednorodnego, tzn. $X_1 = const$, $X_2 = const$.

Podstawmy (11) do (10). Równania (10)₁ i (10)₂ będą spełnione tożsamościowo. Z (10)₃ otrzymamy

$$\begin{aligned}\nabla^2(F_{22} + F_{11}) &= 0, \\ \nabla^2 \nabla^2 F &= 0, \\ \nabla^4 F &= 0,\end{aligned}\tag{12}$$

gdzie $\nabla^4(\cdot) = \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x_2^4}$ to bilaplasjan.

Równanie (12) to równanie tarczy. Wynika z niego, że poszukiwana funkcja Airy'ego musi być funkcją biharmoniczną (bilaplasjan takiej funkcji jest równy zeru).

Wyrażmy jeszcze warunki brzegowe przez funkcję Airy'ego.

$$\begin{aligned}p_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 &\Rightarrow p_1 = F_{22}n_1 - (F_{12} + X_1x_2 + X_2x_1)n_2, \\ p_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 &\Rightarrow p_2 = F_{11}n_2 - (F_{12} + X_1x_2 + X_2x_1)n_1.\end{aligned}\tag{13}$$

W ten sposób problem rozwiązania tarczy w płaskim stanie naprężenia sprowadziliśmy do równania różniczkowego (12) z warunkami (13). Jeżeli uda się znaleźć funkcję Airy'ego dla danego problemu, to naprężenia w każdym punkcie tarczy obliczymy z zależności (11).

Przykład

Dla jakich wartości parametrów a_3 i c_3 podana funkcja może być funkcją Airy'ego?

$$F(x_1, x_2) = \frac{a_3}{12} x_1^4 + \frac{c_3}{2} x_1^2 x_2^2.$$

Funkcja Airyego musi być funkcją biharmoniczną, musi spełniać równanie

$$\nabla^4 F = 0,$$

albo po rozpisaniu operatora

$$\nabla^4 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = F_{1111} + 2 F_{1122} + F_{2222} = 0$$

Policzmy kolejne pochodne występujące w równaniu

$$F_1 = \frac{4a_3 x_1^3}{12} + \frac{2c_3 x_1 x_2^2}{2},$$

$$F_{11} = a_3 x_1^2 + c_3 x_2^2 \Rightarrow F_{112} = 2c_3 x_2,$$

$$F_{111} = 2a_3 x_1, \quad F_{1122} = 2c_3,$$

$$F_{1111} = 2a_3,$$

$$F_{2222} = 0.$$

Podstawmy to do równania tarczy.

$$2a_3 + 2(2c_3) + 0 = 0,$$

skąd

$$a_3 = -2c_3.$$

Taki warunek powinny spełniać parametry a_3 i c_3 .