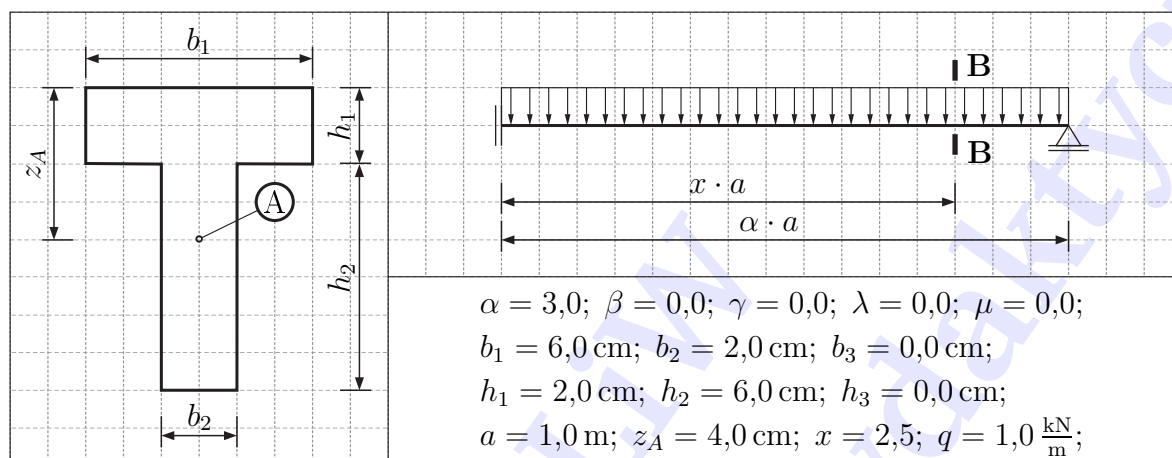


Zadanie 3. – rozwiązanie przykładowe

Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych i stycznych w przekroju **B–B**. W punkcie **A** tego przekroju obliczyć wartość naprężeń zredukowanych wykorzystując hipotezę **Hubera–Misesa**.

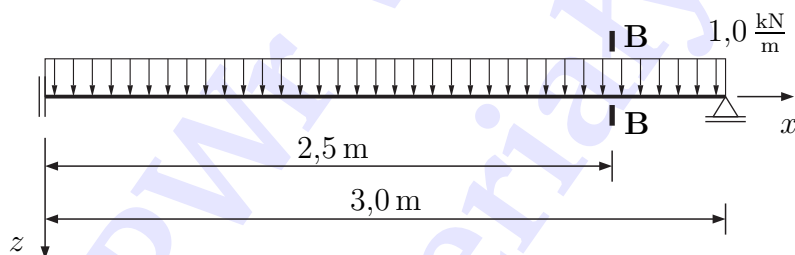
przekrój

belka

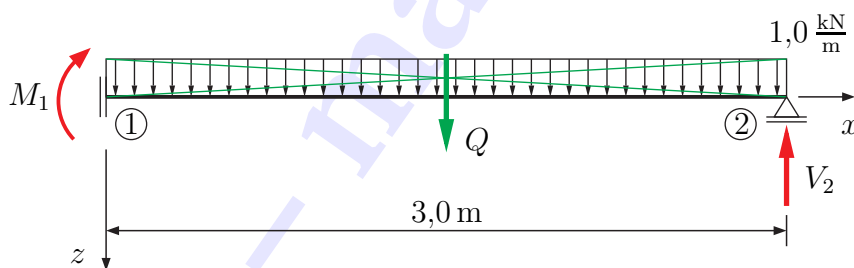


1. Siły wewnętrzne

1.1. Schemat statyczny i obciążenie belki



1.2. Wyznaczenie reakcji



$$Q = 3 \text{ m} \cdot 1,0 \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 3 \text{ kN}$$

$$\Sigma z = 0$$

$$V_2 - Q = 0$$

$$V_2 = Q = 3 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0$$

$$M_1 - Q \cdot \frac{3,0 \text{ m}}{2} = 0$$

$$M_1 = Q \cdot \frac{3,0\text{m}}{2} = 4,5 \text{ kNm}$$

1.3. Siły tnące i momenty zginające

Siły tnące

$$T_z(x) = -1,0 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot x$$

$$T_z(x=0) = 0$$

$$T_z(x=3\text{ m}) = -1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} = -3 \text{ kN}$$

$$T_z(x=2,5\text{ m}) = -1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2,5 \text{ m} = -2,5 \text{ kN} = T_z^{\text{B-B}}$$

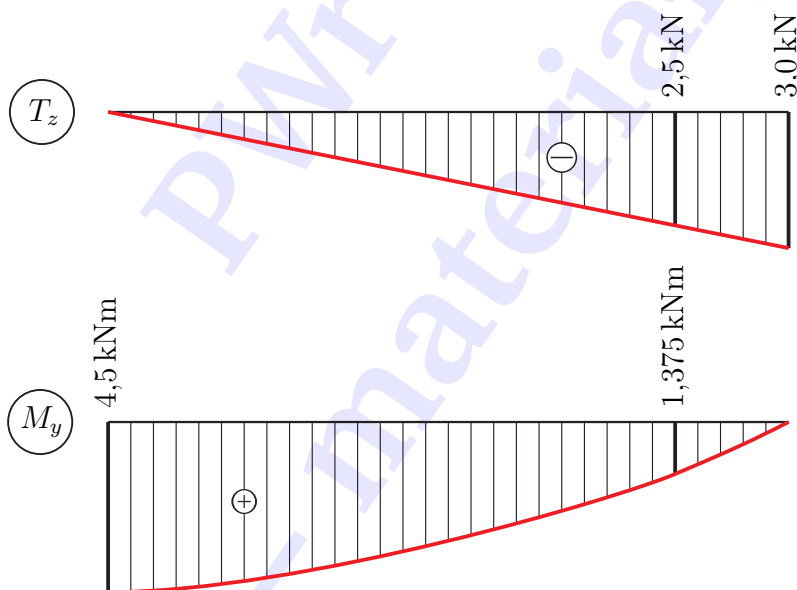
Momenty zginające

$$M_y(x) = M_1 - 1,0 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{x^2}{2} = 4,5 \text{ kNm} - 1,0 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M_y(x=0) = 4,5 \text{ kNm}$$

$$M_y(x=3,0\text{ m}) = 4,5 \text{ kNm} - 1,0 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{(3,0\text{ m})^2}{2} = 0$$

$$M_y(x=2,5\text{ m}) = 4,5 \text{ kNm} - 1,0 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{(2,5\text{ m})^2}{2} = 1,375 \text{ kNm} = M_y^{\text{B-B}}$$



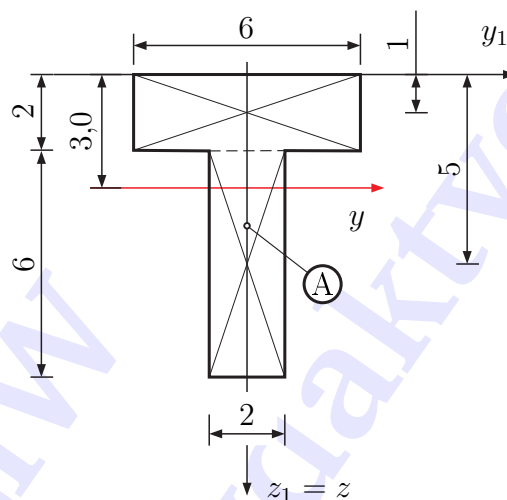
2. Charakterystyki geometryczne

2.1. Środek ciężkości

$$A = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 24,0 \text{ cm}^2$$

$$S_{y_1} = 2 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \cdot 5 = 72,0 \text{ cm}^3$$

$$z_c = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{72,0}{24,0} = 3,00 \text{ cm}$$

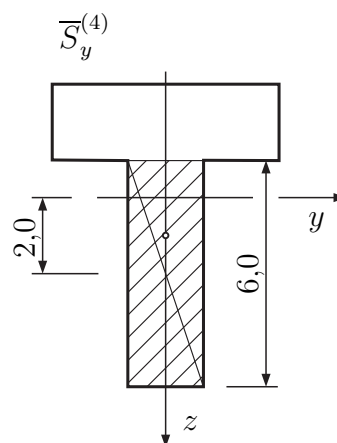
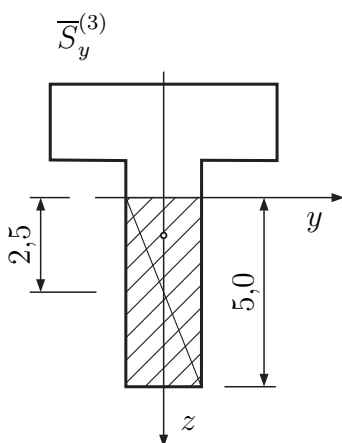
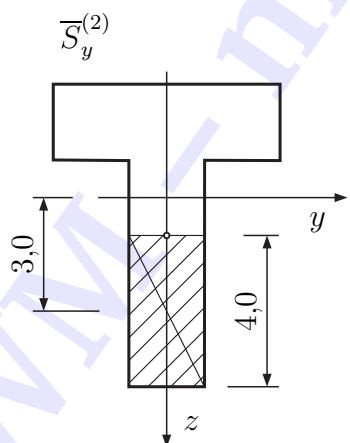
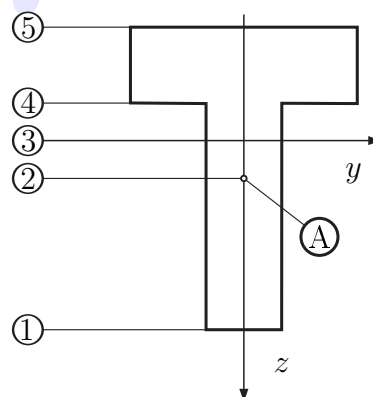


2.2. Moment bezwładności I_y

$$I_y = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + 2 \cdot 6 \cdot 2^2 + \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 6 \cdot 2 \cdot 2^2 = 136,0 \text{ cm}^4$$

2.3. Momenty statyczne odciętej części przekroju i szerokości przekroju

Naprężenia normalne będziemy wyznaczać w punktach (1), (5) oraz (2) – aby wyznaczyć σ_{zred} . Naprężenia styczne będziemy wyznaczać w punktach (3), (4) – ze względu na zmieniającą się szerokość przekroju we włóknaach dolnych i górnych; oraz (2) – aby wyznaczyć σ_{zred} .



$$\bar{S}_y^{(2)} = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24 \text{ cm}^3$$

$$\bar{S}_y^{(3)} = \bar{S}_y^{(2)} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 24 + 1 = 25 \text{ cm}^3$$

$$\bar{S}_y^{(4)} = \bar{S}_y^{(3)} + 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 25 - 1 = 24 \text{ cm}^3$$

$$z^{(1)} = 5 \text{ cm}$$

$$z^{(2)} = 1 \text{ cm}$$

$$z^{(5)} = -3 \text{ cm}$$

$$b^{(2)} = b^{(3)} = b^{(4d)} = 2 \text{ cm}$$

$$b^{(4g)} = 6 \text{ cm}$$

3. Naprężenia

3.1. Naprężenia normalne σ_x

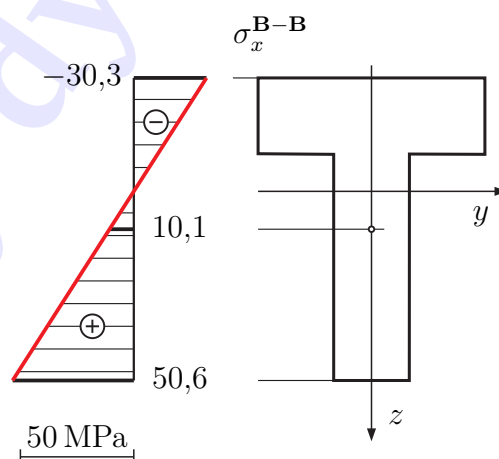
$$\sigma_x^{(1)} = \frac{M_y^{\text{B-B}}}{I_y} \cdot z^{(1)} = \frac{1,375 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{136 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \cdot 0,05 \text{ m}$$

$$= 50,6 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 50,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{1,375 \cdot 10^3}{136 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,01 = 10,1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{(3)} = 0$$

$$\sigma_x^{(5)} = \frac{1,375 \cdot 10^3}{136 \cdot 10^{-8}} \cdot (-0,03) = -30,3 \text{ MPa}$$



3.2. Naprężenia styczne τ_{xz}

$$\tau_{xz}^{(1)} = \frac{T_z^{\text{B-B}} \cdot \bar{S}_y^{(1)}}{I_y \cdot b_0^{(1)}} = \frac{-2,5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 0 \text{ m}^3}{136 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \cdot 0,02 \text{ m}} = 0$$

$$\tau_{xz}^{(2)} = \frac{-2,5 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 10^{-6}}{136 \cdot 10^{-8} \cdot 0,02}$$

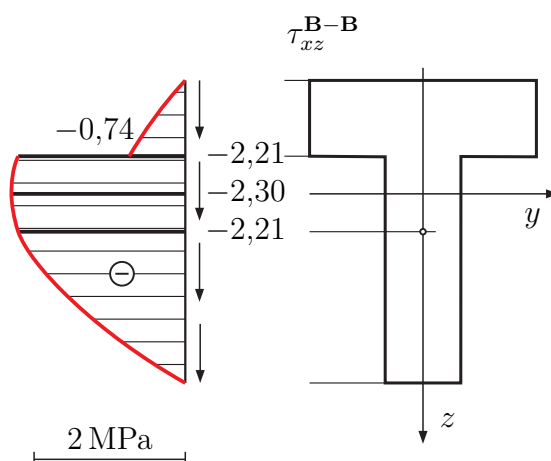
$$= -2,21 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -2,21 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz}^{(3)} = \frac{-2,5 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{136 \cdot 10^{-8} \cdot 0,02} = -2,30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz}^{(4d)} = \frac{-2,5 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 10^{-6}}{136 \cdot 10^{-8} \cdot 0,02} = -2,21 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz}^{(4g)} = \frac{-2,5 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 10^{-6}}{136 \cdot 10^{-8} \cdot 0,06} = -0,74 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz}^{(5)} = 0$$



3.3. Naprężenia zredukowane σ_{zred}

Naprężenia zredukowane dla stanu naprężenia belkowego:

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{xz}^2} \quad \text{— hipoteza Hubera–Misesa}$$

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xz}^2} \quad \text{— hipoteza Tresci–Guesta}$$

Naprężenia zredukowane wyznaczone zgodnie z hipotezą **Hubera–Misesa** w punkcie **A** przekroju **B–B**.

$$\sigma_{zred}^{(2)} = \sqrt{10,1^2 + 3 \cdot (-2,21)^2} = 10,8 \text{ MPa}$$