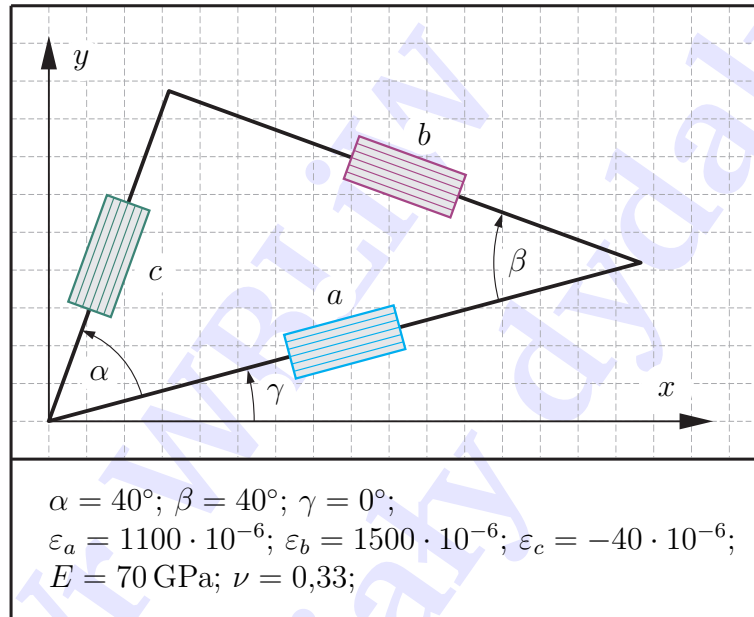


Zadanie 4. – rozwiązanie przykładowe

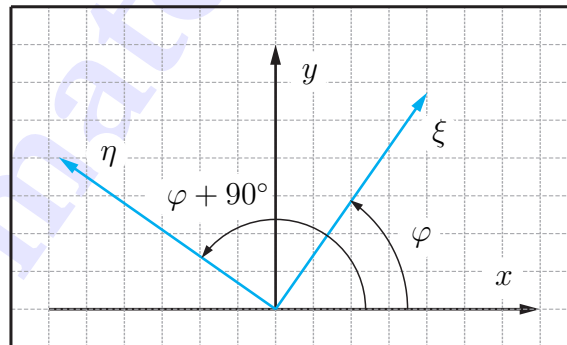
W wyniku pomiarów przeprowadzonych przy użyciu rozety tensometrycznej, uzyskano wartości odkształceń ε_a , ε_b oraz ε_c na kierunkach określonych osiami tensometrów. Wykorzystując wyniki tych pomiarów oraz podane stałe materiałowe E i ν wyznaczyć:

- składowe stanu odkształcenia ε_x , ε_y i γ_{xy} oraz naprężenia σ_x , σ_y i τ_{xy} ,
- kierunki główne stanu odkształcenia i wartości odkształceń głównych ε_1 , ε_2 .

Rozeta tensometryczna



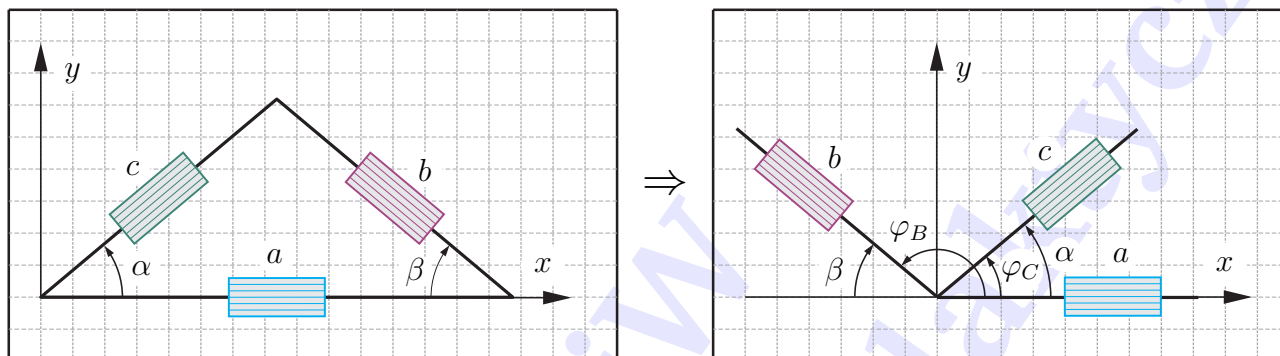
Wzory transformacyjne przy obrocie układu współrzędnych o kąt φ :



$$\begin{cases} \varepsilon_\xi = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \\ \varepsilon_\eta = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \cos(2 \cdot \varphi) - \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \\ \gamma_{\xi\eta} = \gamma_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) - (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \end{cases}$$

Rozwiązanie

Położenia osi tensometrów a , b oraz c można przedstawić jako osie powstałe w efekcie obrotów osi x układu współrzędnych odpowiednio o kąty $\varphi_a = \gamma = 0^\circ$, $\varphi_b = 180^\circ - \beta + \gamma = 140^\circ$ i $\varphi_c = \gamma + \alpha = 40^\circ$:



Wyznaczone na drodze eksperymentu wielkości ε_a , ε_b oraz ε_c można traktować jako składowe stanu odkształcenia określone w układach obróconych względem osi układu OXY . Muszą one więc spełniać następujące równania, zapisane zgodnie z wzorami transformacyjnymi:

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \cos(2\varphi_a) + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \sin(2\varphi_a) \\ \varepsilon_b = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \cos(2\varphi_b) + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \sin(2\varphi_b) \\ \varepsilon_c = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \cos(2\varphi_c) + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \sin(2\varphi_c) \end{cases}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych $\sin$ i $\cos$ dla kątów $2\varphi_a = 0^\circ$, $2\varphi_c = 80^\circ$ i $2\varphi_b = 280^\circ$:

$$\begin{array}{lll} \sin(0^\circ) = 0 & \sin(80^\circ) = 0,9848 & \sin(280^\circ) = -0,9848 \\ \cos(0^\circ) = 1 & \cos(80^\circ) = 0,1736 & \cos(280^\circ) = 0,1736 \end{array}$$

Po podstawieniu:

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot 0 = \varepsilon_x \\ \varepsilon_b = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot 0,1736 + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot (-0,9848) \\ \varepsilon_c = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot 0,1736 + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot 0,9848 \end{cases}$$

Po uwzględnieniu, że $\varepsilon_a = \varepsilon_x$

$$\begin{cases} \varepsilon_b = 0,5868 \cdot \varepsilon_a + 0,4132 \cdot \varepsilon_y - 0,4924 \cdot \gamma_{xy} \\ \varepsilon_c = 0,5868 \cdot \varepsilon_a + 0,4132 \cdot \varepsilon_y + 0,4924 \cdot \gamma_{xy} \end{cases}$$

Dodając równania stronami obliczymy

$$\varepsilon_b + \varepsilon_c = 1,1736 \cdot \varepsilon_a + 0,8264 \cdot \varepsilon_y \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_b + \varepsilon_c - 1,1736 \cdot \varepsilon_a}{0,8264} = 204,5 \cdot 10^{-6}$$

a po odjęciu stronami otrzymamy

$$\varepsilon_b - \varepsilon_c = -0,9848 \cdot \gamma_{xy} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_b}{0,9848} = -1563,8 \cdot 10^{-6}$$

Ostatecznie wartości odkształceń ε_x , ε_y oraz γ_{xy} :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 1100 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_y = 204,5 \cdot 10^{-6} \\ \gamma_{xy} = -1563,8 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

Wyznaczenie kierunków odkształceń głównych:

$$\tan(2 \cdot \varphi_0) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\tan(2 \cdot \varphi_0) = \frac{-1563,8 \cdot 10^{-6}}{(1100 - 204,5) \cdot 10^{-6}}$$

$$\tan(2 \cdot \varphi_0) = -1,746 \Rightarrow \varphi_0 = -30,1^\circ$$

Wyznaczenie wartości odkształceń głównych:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (1100 + 204,5) \cdot 10^{-6} \pm \frac{1}{2} \sqrt{[(1100 - 204,5) \cdot 10^{-6}]^2 + (-1563,8 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = 652,3 \cdot 10^{-6} \pm 900,9 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 1553 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_2 = -249 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

Wyznaczenie wartości naprężeń σ_x , σ_y oraz τ_{xy} :

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) = \frac{70 \cdot 10^3 \text{ MPa}}{1 - 0,33^2} \cdot (1100 + 0,33 \cdot 204,5) \cdot 10^{-6} = 91,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x) = \frac{70 \cdot 10^3 \text{ MPa}}{1 - 0,33^2} \cdot (204,5 + 0,33 \cdot 1100) \cdot 10^{-6} = 44,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma_{xy} = \frac{70 \cdot 10^3 \text{ MPa}}{2 \cdot (1 + 0,33)} \cdot (-1563,8) \cdot 10^{-6} = -41,2 \text{ MPa}$$